

אלגברה לינארית

© ארזים

7 באפריל 2016

1 צורת ז'ורדן

תיכורת: בפרק הזה אנחנו מניחים תמיד שהפולינום האופייני מתפרק מעל F למכפלת גורמים לינאריים (במילים אחרות, כל הערכים העצמיים נמצאים בשדה). בהנתן טרנספורמציה לינארית T על מרחב ווקטורי V רשמנו

$$f_T = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{n_i}$$

כאשר $\lambda_i \neq \lambda_j$ לכל $i \neq j$. משפט הפירוק הפרימרי נותן פירוק של V לסכום ישר של תתי-מרחבים T -אינווריאנטיים

$$V = \bigoplus_{i=1}^k \ker(T - \lambda_i I)^{n_i} = \bigoplus_{i=1}^k W_i$$

עכשיו אנחנו מנסים להבין את הפעולה של T על כל W_i - שוב רוצים לפרק לסכום ישר של המרכיבים הכי בסיסיים - האי-פריקים. נשים לב שעל כל W_i הטרנספורמציה $T - \lambda_i I$ היא נילפוטנטית.

הגדרה 1.1 טרנספורמציה לינארית S נקראת נילפוטנטית אם קיים m כך שמתקיים $S^m \equiv 0$. המינימלי שמקיים זאת נקרא אינדקס הנילפוטנטיות של S .

נשים לב שכל פירוק של מרחב לתתי-מרחבים T -אינווריאנטיים הוא גם פירוק לתתי-מרחבים $T - \lambda I$ -אינווריאנטיים ולהיפך. לכן לאחר שנבין את הפירוק של תתי-מרחבים W_i תחת פעולת כל $S_i = T - \lambda_i I$ למרכיבים אי-פריקים, אלו יהיו גם הרכיבים האי-פריקים לפעולת T עליו.

מכאן אנו ממשיכים כדי לנתח את פעולת טרנספורמציה לינארית נילפוטנטית. תהי S טרנספורמציה נילפוטנטית על מרחב ווקטורי W . הגדרנו טרנספורמציות מהסוג הזה באופן הבא וקראנו למרחבים הללו S -ציקליים. מעכשיו S נילפוטנטית.

הגדרה 1.2 W ייקרא S -ציקלי אם קיים $w \in W$ כך שהקבוצה $\{w, Sw, S^2w, \dots, S^{m-1}w\}$ היא בסיס למרחב W , כאשר $S^m = 0$. כזה נקרא יוצר ציקלי (תחת S).

דוגמאות:

1. טרנספורמציית הגזירה על $\mathbb{R}_n[x]$. היוצר המתאים הוא $w = x^n$.

2. באופן כללי, יהי $W = F^m$, נגדיר טרנספורמצייה לינארית:

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_{n-1})$$

וכעת $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ הוא יוצר ציקלי של W .

הוכחנו שאם S נילפוטנטית והמרחב W הוא S -ציקלי אזי W הוא אי-פריק. מטרתנו היא להוכיח שאם S נילפוטנטית על W אזי פירוק של W לסכום ישר של תתי מרחבים אי פריקים הוא פירוק שלה לסכום ישר של תתי מרחבים ציקליים (תחת S). כלומר, אנחנו רוצים להראות שאם S נילפוטנטית על W אזי W אי פריק אם ורק אם הוא ציקלי (כאשר את הגרירה מציקלי לאי-פריק הוכחנו כבר והיא קלה יותר). לפני שנגיע לכך נבין מעט טוב יותר את הפעולה של טרנספורמציה לינארית S על מרחב שהוא סכום ישר של תתי-מרחבים ציקליים.

טענה 1.3 נניח כי S טרנספורמציה לינארית נילפוטנטית על W , וכן

$$W = \bigoplus_{i=1}^k W_i$$

כאשר כל W_i הוא ציקלי. אזי:

1. לכל i , $S(W_i) \subseteq W_i$ היא גם תת-מרחב S -ציקלי.

2. $\dim \ker(S|_{W_i}) = 1$.

3. $\dim \ker S = k$.

הוכחה: בסעיפים:

1. מידי מההגדרה שאם $w_i \in W_i$ הוא יוצר ציקלי של S אזי $Sw_i \in S(W_i)$ הוא יוצא ציקלי לפעולת S על $S(W_i)$.

2. ברור שמתקיים $S(S^{m_i-1}w_i) = 0$ כאשר m_i הוא אינדקס הנילפוטנטיות לפעולת S על W_i . לכן $S^{m_i-1}w_i \in \ker S$ ווקטור זה גם פורש את $\ker S$, כי אם נקבע את i נוכל לקבל:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=0}^{m_i-1} a_j (S^j w_i) \in \ker s \\ 0 &= Sv = \sum_{j=0}^{m_i-1} a_j (S^{j+1} w_i) = \sum_{j=0}^{m_i-2} a_j (S^{j+1} w_i) \end{aligned}$$

אבל אלה ווקטורים בת"ל ולכן נקבל שלכל $0 \leq j \leq m_i - 2$ מתקיים $a_j = 0$, ולכן $v = a_{m_i-1} S^{m_i-1} w_i$.

3. עובדה כללית היא שאם

$$W = \bigoplus_{i=1}^k W_i$$

הוא פירוק לתתי-מרחבים S -אינווריאנטיים אזי

$$\ker S = \bigoplus_{i=1}^k \ker S|_{W_i}$$

ומכאן נובעת הטענה מתוך סעיף 2. נותר רק להוכיח עובדה זו.

$$w = \sum_{i=1}^k w_i$$

כעת, אם

$$0 = S(w) = \sum_{i=1}^k S(w_i)$$

אזי בגלל שהסכום ישר נובע כי $S(w_i) = 0$ לכל i , ולכן $w_i \in \ker S|_{W_i}$.

■

משפט 1.4 תהי S נילפוטנטית על W . אזי קיים בסיס של W מהצורה

$$w_1, Sw_1, \dots, S^{b_1-1}w_1, w_2, Sw_2, \dots, S^{b_2-1}w_2, \dots, w_k, Sw_k, \dots, S^{b_k-1}w_k$$

כאשר לכל i , $S^{b_i}w_i = 0$. כל קבוצה $\{w_i, Sw_i, \dots, S^{b_i-1}w_i\}$ נקראת שרשרת ז'ורדן.

הוכחה: באינדוקציה על $\dim W$. אם $\dim W = 1$ הטענה טריוויאלית (קל לבדוק).
 שלב המעבר: ניזכר שמניחים שהטרנספורמציה S נילפוטנטית. נביט במרחב $U = S(W)$. כיוון שהסקלר 0 הוא ערך עצמי של S מתקיים $\dim \ker S > 0$ ולכן $\dim \operatorname{Im} S < \dim W$. כלומר $\dim U < \dim W$ וניתן להפעיל את הנחת האינדוקציה לפעולת S על U (שהיא כמובן נילפוטנטית). מהנחת האינדוקציה, קיים בסיס למרחב U שהוא איחוד של שרשראות ז'ורדן כמו במשפט:

$$u_1, Su_1, \dots, S^{b_1-1}u_1, u_2, Su_2, \dots, S^{b_2-1}u_2, \dots, u_k, Su_k, \dots, S^{b_k-1}u_k$$

כפי שכבר ראינו, כל הווקטורים $S^{b_i-1}u_i$ הם בגרעין של S , וכמובן שהם בלתי-תלויים בהיותם חלק מבסיס. כעת נשלים אותם לבסיס של $\ker S$:

$$\{S^{b_1-1}u_1, \dots, S^{b_k-1}u_k, v_1, \dots, v_m\}$$

כיוון שהגדרנו $U = S(W)$ קיים לכל i ווקטור $w_i \in W$ כך שמתקיים $S(w_i) = u_i$.
 כעת, נוכיח שהקבוצה

$$w_1, u_1, Su_1, \dots, S^{b_1-1}u_1, w_2, u_2, Su_2, \dots, S^{b_2-1}u_2, \dots, w_k, u_k, Su_k, \dots, S^{b_k-1}u_k, v_1, \dots, v_m$$

היא בסיס (נשים לב שהיא איחוד של שרשראות זיורדן - k הראשונות ברורות, והשאר הן שרשראות באורך אחד, שכן הווקטורים הם בגרעין). עבור אי-תלות לינארית, ניקח צירוף לינארי של איברי הקבוצה שמתאפס. נפעיל עליו את S , ובכך נעלים את $S^{b_i-1}u_i$ לכל i וכן את v_i לכל i (כי הם בגרעין). נקבל שצירוף לינארי של הפעלת S על האיברים הנותרים מתאפס. כל שרשרת בפני עצמה תועתק לשרשרת:

$$Sw_i = u_i, S(S^j u_i) = S^{j+1}u_i$$

לכן בעצם נקבל צירוף לינארי של

$$u_1, Su_1, \dots, S^{b_1-1}u_1, u_2, Su_2, \dots, S^{b_2-1}u_2, \dots, u_k, Su_k, \dots, S^{b_k-1}u_k$$

שמתאפס, אבל קבוצה זו היא בסיס של U ולכן המקדמים שלהם חייבים להתאפס. לכן בצירוף המקורי שלנו שמתאפס, נותרו רק המקדמים של

$$\{S^{b_1-1}u_1, \dots, S^{b_k-1}u_k, v_1, \dots, v_m\}$$

וקבוצה זו היא בסיס של $\ker S$, ולכן גם המקדמים שלהם חייבים להתאפס. לכן כל המקדמים בצירוף התאפסו, והקבוצה הגדולה שלנו היא בלתי-תלויה לינארית. עבור פרישה, מספיק להוכיח שמספר האיברים בקבוצה הוא כמימד המרחב. נספור את הווקטורים:

$$(b_1 + 1) + (b_2 + 1) + \dots + (b_k + 1) + m = \sum_{i=1}^k b_i + k + m$$

כעת, ממשפט המימדים

$$\dim W = \dim S(W) + \dim \ker S = \dim U + \dim \ker S$$

כעת, בגלל הבסיס שלנו למרחבים $U, \ker S$ נקבל

$$\begin{aligned} \dim U &= \sum_{i=1}^k b_i \\ \dim \ker S &= k + m \end{aligned}$$

ולכן הקבוצה הגדולה שלנו היא בסיס - קבוצה בלתי-תלויה שבה כמות הווקטורים שווה למימד. לכן סיימנו את ההוכחה. ■

נשים לב שהמשפט נותן את הדבר הבא: אם נסמן $W_i = \text{span}\{w_i, \dots, S^{b_i-1}w_i\}$ אזי מהבנייה כל w_i הוא S -אינווריאנטי וכן S -ציקלי תחת פעולת S עליו. לכן המשפט נותן פירוק של כל מרחב ווקטורי תחת טרנספורמציה לינארית נילפוטנטית לסכום ישר של מרחבים ציקליים (שהם, כפי שכבר הוכחנו, אי-פריקים). כמו כן, נשים לב שהמשפט הזה נותן את הכיוון ההפוך למה שהוכחנו בסוף השיעור הקודם: כל מרחב אי פריק תית טרנספורמציה נילפוטנטית הוא ציקלי. זאת משום שאם, בסימוני המשפט, k גדול מאחד, קיבלנו פירוק לא טריוויאלי של המרחב לסכום ישר מרחבים S -אינווריאנטיים, בסתירה לפריקות. לכן $k = 1$ והמרחב ציקלי.

הערה 1.5 המטריצה המתאימה לבסיס $\{w, Sw, \dots, S^{m-1}w\}$ של מרחב S -ציקלי היא

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אם S נילפוטנטית על W , מהמשפט הקודם אנחנו יודעים שקיים פירוק

$$W = \bigoplus_{i=1}^k W_i$$

למרחבים S -ציקליים. W_i אינם ייחודיים בדרך כלל, אבל כמות והמימדים שלהם ייקבעו ביחידות על ידי S . כלומר:

משפט 1.6 תהי S נילפוטנטית על W , ונניח כי קיימים שני פירוקים של W לסכום ישר של תתי-מרחבים S -אינווריאנטיים וכן S -ציקליים:

$$W = \bigoplus_{i=1}^k U_i = \bigoplus_{i=1}^l V_i$$

אזי מתקיים $k = l$, ולאחר סידור מחדש מתקיים $\dim U_i = \dim V_i$ לכל i .

הוכחה: שוב, באינדוקציה על $\dim W$. כמובן, המקרה $\dim W = 1$ הוא טריוויאלי. כמו קודם, $S(W) \subseteq W$ הוא ממימד קטן יותר מאשר W . נניח שקיימים שני פירוקים של W מהצורה שבמשפט. נתבונן כעת במרחב $S(W)$. נניח כי המימדים של U_i היו

$$1, 1, 1, \dots, 1 < n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_p$$

כאשר יש כאן s פעמים 1, ומתקיים $k = s + p$.

נניח גם כי המימדים שהתקבלו עבור W_i היו

$$1, 1, 1, \dots, 1 < m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_r$$

כאשר כאן יש t פעמים 1, ומתקיים $l = t + r$.
 כל U_i, V_i הוא ציקלי, והוכחנו שתמונת מרחב S -ציקלי תחת S היא שוב ציקלית, ולכן
 נובע שהפירוק שמתקבל מכל אחת מהאפשרויות הנ"ל עבור $S(W)$, מבחינת מימדים, הוא

$$0, 0, \dots, 0 < n_1 - 1 \leq n_2 - 1 \leq \dots \leq n_p - 1$$

וכן

$$0, 0, \dots, 0 < m_1 - 1 \leq m_2 - 1 \leq \dots \leq m_r - 1$$

כעת מהנחת האינדוקציה $p = r$ וכן לכל i מתקיים $n_i - 1 = m_i - 1$, כלומר $n_i = m_i$.
 נותר רק להראות כי $t = s$. זה נובע מכך שמתקיים

$$\begin{aligned} \dim \ker S &= s + p \\ \dim \ker S &= t + r \end{aligned}$$

וזאת מן הטענה שהוכחנו קודם לגבי הגרעין של S ביחס לפירוק. אנחנו כבר יודעים
 שמתקיים $p = r$, ולכן קיבלנו גם כי $t = s$, ובכך סיימנו את ההוכחה. ■