

אלגברה לינארית

© ארזים

19 באפריל 2016

1 תבניות בי-לינאריות

V מרחב ווקטורי מעל F , $f(u, v)$ תבנית בי לינארית, $f: V \times V \rightarrow F$. מתקיים:

$$\begin{aligned}f(u_1 + u_2, v) &= f(u_1, v) + f(u_2, v) \\f(u, v_1 + v_2) &= f(u, v_1) + f(u, v_2) \\f(\alpha u, v) &= f(u, \alpha v) = \alpha f(u, v)\end{aligned}$$

דוגמא

1.

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$$

2.

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 0$$

3. לא תבנית בי-לינארית:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 1$$

4. לא תבנית בי-לינארית:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_2 + 3x_1 x_2$$

5. לא תבנית בי-לינארית:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = y_1$$

הגדרה 1.1 תבנית f נקראת סימטרית אם $f(u, v) = f(v, u)$, ונקראת אנטי-סימטרית אם $f(u, v) = -f(v, u)$.

בהנתן בסיס B , לתבנית בי-לינארית קיימת מטריצה מייצגת A , כך שמתקיים

$$f(u, v) = [v]_B^T A [u]_B$$

למשל, בדוגמה הראשונה קודם,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

באופן כללי, אם A מייצגת את $f(u, v)$, אזי A^t מייצגת את $f(v, u)$.

דוגמא

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2 = 4x_1y_1$$

הגדרה 1.2 מטריצות A, B נקראות חופפות אם הן מייצגות את אותה התבנית. באופן שקול, קיימת P הפיכה כך שמתקיים

$$\begin{aligned} v^t B u &= (Pv)^t A (Pu) = v^t P^t A P u \\ B &= P^t A P \end{aligned}$$

הערה 1.3 אם A, B חופפות מעל שדה גדול יותר K , הן לא בהכרח חופפות מעל F .

דוגמא מעל $\mathbb{R}$, נגדיר

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= x_1 y_1, A = (1) \\ f(x_1, y_1) &= -x_1 y_1, A = (-1) \end{aligned}$$

לא יכולות להיות חופפות מעל $\mathbb{R}$, כי הדטרמיננטות מסימנים שונים, והמנה בין הדטרמיננטות של מטריצות חופפות חייבת להיות ריבוע. לעומת זאת, מעל $\mathbb{C}$, מתקיימת חפיפה, עם המטריצה (i) .

דוגמא האם $x_1y_1 - x_2y_2, x'_1y'_2 + x'_2y'_1$ חופפות מעל $\mathbb{R}$? הראשונה מיוצגת על ידי $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

והשנייה על ידי $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. נגדיר את ההעתקה הלינארית:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x'_1 + x'_2}{\sqrt{2}} \\ x_2 &= \frac{x'_1 - x'_2}{\sqrt{2}} \\ y_1 &= \frac{y'_1 + y'_2}{\sqrt{2}} \\ y_2 &= \frac{y'_1 - y'_2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

וכעת, הצבה תיתן

$$x_1y_1 - x_2y_2 = \frac{(x'_1 + x'_2)(y'_1 + y'_2)}{2} - \frac{(x'_1 - x'_2)(x'_1 + x_2)}{2} = x'_1y'_2 + x'_2y'_1$$

דוגמא $x_1y_1 - x_2y_2, 2(x'_1y'_2 + x'_2y'_1)$ חופפות מעל $\mathbb{Q}$.

משפט 1.4 במציין שאינו 2, כל תבנית סימטרית חופפת לתבנית אלכסונית (מיוצגת על ידי מטריצה אלכסונית), כלומר

$$f(x, y) = c_1x_1y_1 + \dots + c_nx_ny_n$$

משפט 1.5 מעל $\mathbb{R}$, כל תבנית סימטרית חופפת לתבנית

$$D_{p,q} = x_1y_1 + \dots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \dots - x_{p+q}y_{p+q}$$

משפט 1.6 (ההתמדה) $D_{r,s}, D_{p,q}$ חופפות אם ורק אם $p = r, q = s$.

הגדרה 1.7 הסיגנטורה (סימן) של תבנית בי-לינארית סימטרית מעל $\mathbb{R}$ מוגדרת, כאשר התבנית חופפת לתבנית $D_{p,q}$,

$$\sigma(D_{p,q}) = p - q$$

הגדרה 1.8 הדרגה של תבנית כזו:

$$\text{rk}(D_{p,q}) = p + q$$

הגדרה 1.9 תבנית סימטרית f מעל $\mathbb{R}$ נקראת חיובית אם לכל v מתקיים $f(v, v) \geq 0$.
היא נקראת חיובית ממש אם לכל v מתקיים $f(v, v) > 0$.

משפט 1.10 תהא f תבנית בי-לינארית על מרחב ווקטורי V מעל $\mathbb{R}$, שמיוצגת על ידי A מעל בסיס כלשהו. התנאים הבאים שקולים:

1. f חיובית לחלוטין.

2. A חופפת למטריצה $\text{diag}(c_1, \dots, c_n)$, כאשר $c_i > 0$.

3. A חופפת למטריצה I .

4. $A = P^T P$ עבור P הפיכה וממשית.

הוכחה: 1 $\Leftrightarrow$ 2: A חופפת למטריצה אלכסונית כלשהי $\text{diag}(c_1, \dots, c_n)$, לפי משפט כללי. כשנציב את איברי הבסיס המתאים נקבל $f(u_i, u_i) = c_i$, ולכן $c_i > 0$.
2 $\Leftrightarrow$ 3: נבחר $P = \text{diag}(\sqrt{c_1}, \dots, \sqrt{c_n})$, ונקבל $\text{diag}(c_1, \dots, c_n) = P^T I P$.
3 $\Leftrightarrow$ 4: מהגדרה.
4 $\Leftrightarrow$ 1: נציב

$$f(u, u) = u^T A u = u^T P^T P u = (Pu)^T (Pu) = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$$

■

ולכן f חיובית לחלוטין.

משפט 1.11 תהא f תבנית סימטרית מעל $\mathbb{R}$. נתבונן בסדרת המינורים

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

ובסדרת הדטרמיננטות:

$$1, \det A_1, \dots, \det A_n$$

ונניח כי אינן מתאפסות.

אז, f חופפת לתבנית $D_{p,q}$, כאשר p הוא מספר הזוגות $\det A_i, \det A_{i+1}$ בהם נשמר הסימן, וכן q מספר הזוגות בהם מתהפך הסימן.

הוכחה: נניח כי f מיוצגת על ידי

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

בהכרח $a_{11} \neq 0$, שכן $a_{11} = \det A_1 \neq 0$. על ידי פעולות חפיפה נעבור למטריצה

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

כמובן שלא שינינו את הדטרמיננטות, והמטריצה עדיין סימטרית. נוכל להמשיך באותו אופן ולקבל חפיפה למטריצה

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}$$

וזו בוודאי חופפת למטריצה

$$C' = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(c_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname{sgn}(c_n) \end{pmatrix}$$

שחופף למטריצה $D_{p,q}$ מסויימת על ידי החלפה של שורות ועמודות, כאשר p הוא מספר האיברים c_i החיוביים, שמציינים איפה הסימן של הדטרמיננטה נשמר, וכן q הוא מספר האיברים c_i השליליים, שמציינים איפה הסימן של הדטרמיננטה מתהפך. ■

דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 17 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A_1 = 1$$

$$\det A_2 = 1$$

$$\det A_3 = -87$$

לכן A חופפת למטריצה $D_{2,1}$. נבצע פעולות עמודה ושורה ונגיע לכדי

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -87 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

מסקנה 1.12 A חיובית לחלוטין אם ורק אם $\det A_i > 0$ לכל i .

הוכחה: כיוון אחד נובע מיידית, אם התנאי על הדטרמיננטות מתקיים אזי A חופפת למטריצה $D_{n,0} = I$.

בכיוון השני, נבצע את אותו תהליך שביצענו במשפט, ניוכח שכיוון שהתבנית A חיובית לחלוטין, תמיד $a'_{ii} > 0$. לכן, נגיע בסוף לצורה אלכסונית שבה כל האיברים חיוביים באלכסון, ולכן הדטרמיננטות של המינורים שם חיוביות - אבל בתהליך לא שינינו את הדטרמיננטות, ולכן הן היו חיוביות ממש מלכתחילה. ■

טענה 1.13 (קודמת) A חיובית לחלוטין אזי $\det A > 0$, שכן $\det A = \det P^T \det P = (\det P)^2$.

הגדרה 1.14 תבנית בי-לינארית f נקראת לא מנוונת אם לכל $0 \neq v \in V$ קיים $u \in V$ כך שמתקיים $f(u, v) \neq 0$.

דוגמא תבנית לא מנוונת

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

דוגמא תבנית מנוונת

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

שכן הווקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ בקואורדינטה הראשונה מאפס את התבנית בלי תלות בווקטור השני.

משפט 1.15 יהא V מרחב ווקטורי מעל F ממציין שאינו 2, $f \in B(V, V)$ אנטי סימטרית לא מנוונת. אזי f חופפת למטריצה

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & 1 & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ -1 & & & & \end{pmatrix}$$

הוכחה: בתרגיל בית, נוכיח שאם n אי זוגי, f בהכרח מנוונת. עבור הזוגיים, נוכיח באינדוקציה על n . יהא v כלשהו, יהא u כך שמתקיים $f(u, v) \neq 0$ (קיים כי f לא מנוונת). בלי הגבלת הכלליות, ניתן להניח כי $f(u, v) = 1, f(v, u) = -1$. נשים לב כי u, v חייבים להיות בלתי תלויים (אחרת אחד מהם כפולה סקלרית של השני ומקבלים $f(u, v) = 0$). נגדיר

$$\begin{aligned} W_1 &= \text{span}\{u, v\} \\ W_2 &= \{w \in V \mid f(w, u) = f(w, v) = 0\} \end{aligned}$$

נראצה להוכיח שמתקיים $W_1 \oplus W_2 = V$. אם $w \in W_1 \cap W_2$, אזי $w = au + bv$, ולכן

$$\begin{aligned} 0 &= f(w, u) = f(au + bv, u) = -b \\ 0 &= f(w, v) = f(au + bv, v) = a \end{aligned}$$

לכן $a = b = 0$ ולכן $w = 0$, והחיתוך הוא $\{0\}$.
 כעת יהא w כללי. נרצה למצוא $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ כך שמתקיים $w = w_1 + w_2$.
 נגדיר

$$\begin{aligned} w_1 &= au + bv, a = f(w, v), b = -f(w, u) \\ w_2 &= w - w_1 \end{aligned}$$

בבירור, $w_1 \in W_1$, וכן

$$\begin{aligned} f(w_2, u) &= f(w, u) - f(w_1, u) = 0 \\ f(w_2, v) &= f(w, v) - f(w_1, v) = 0 \end{aligned}$$

ולכן נקבל גם $w_2 \in W_2$. לכן קיבלנו $W_1 \oplus W_2 = V$.
 כעת, ברור שהמטריצה המייצגת של f מעל W_1 היא $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ עבור הבסיס $\{u, v\}$.
 המרחב W_2 הוא ממימד קטן בשתיים, וכאשר נצמצם את f עליו נקבל תבנית בי-לינארית אנטי סימטרית. נותר רק להוכיח שהיא לא מנוונת עליו כדי להפעיל את הנחת האינדוקציה ולסיים.

אם קיים $w \in W_2$ כך שמתקיים $f(w, w') = 0$ לכל $w' \in W_2$, אזי גם $f(w, w'') = 0$ לכל $w'' \in V$, כי $w'' = w_1 + w_2$, כאשר $w_2 \in W_2$ וכן $w_1 = au + bv$, ולכן
 $f(w, au + bv + w_2) = af(w, u) + bf(w, v) + f(w, w_2) = af(w, u) + bf(w, v)$
 וזה מתאפס משום שהווקטור $w \in W_2$, ולכן $f(w, u) = f(w, v) = 0$, וכן הנחנו כי עבור w התבנית על W_2 מנוונת, ולכן $f(w, w_2) = 0$. קיבלנו סתירה לכך שהתבנית f אינה מנוונת על כל המרחב V .
 לכן כאשר נצטצמם על W_2 נקבל מטריצה מהצורה שרצינו, וכשנוסיף את u, v נקבל את מה שביקשנו להוכיח. ■