

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

5 באפריל 2016

ראינו כי עבור טרנספורמציה נילפוטנטית ציקלית, קיים v כלשהו כך שהקבוצה

$$B = \{v, Tv, \dots, T^r v\}$$

היא בסיס, וכן $T^{r+1} \equiv 0$ כלומר

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אם ניקח את הבסיס בסדר הפוך, נקבל שהמטריצה זהה רק שהאחדים הם מעל האלכסון. מקרה כללי הוא בלוק ז'ורדן:

$$J_{n,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

כאשר n הוא מימד המטריצה. כעת, מתקיים

$$f_{J_{n,\lambda}} = m_{J_{n,\lambda}} = (x - \lambda)^n$$

וכן קיים בסיס $\{v_1, \dots, v_n\}$ כך שמתקיים.

$$Tv_1 = \lambda v_1$$

ולכל $i > 1$

$$Tv_i = \lambda v_i + v_{i-1}$$

כלומר מתקיים

$$[T]_{\{v_1, \dots, v_n\}} = J_{n, \lambda}$$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} (0) & & & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix} & & & & \\ & & (1) & & & \\ & & & (1) & & \\ & & & & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix} & \\ & & & & & (3) \\ & & & & & & (3) \\ & & & & & & & \begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

דוגמא נוספת: יהי $T: V^3 \rightarrow V^3$, ויהי בסיס $B = \{u, v, w\}$. נניח כי

$$T(u) = v, T(v) = -u, T(w) = 2u + w$$

כעת,

$$\begin{aligned} A &= [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f_A(x) &= \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = \\ &= (x-1)(x^2+1) = (x-1)(x-i)(x+i) \end{aligned}$$

נרצה למצוא את בלוקי זיורדן.

אם נסמן $g_1(x) = x - 1$, אזי נתבונן במרחב

$$\ker(g_1(A)) = \ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span}\{u + v + w\}$$

כעת $g_2(x) = x^2 + 1$.

$$\ker(g_2(A)) = \ker(A^2 + I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{span}\{u, v\}$$

כעת ממשפט הפירוק הפרימרי נקבל

$$V = \text{span}\{u, v\} \oplus \text{span}\{u + v + w\}$$

זוהי צורה כסכום של אי־פריקים מעל $\mathbb{R}$ - מעל $\mathbb{C}$ ניתן היה להמשיך לפרק את g_2 , אך בממשיים הוא עצמו לא פריק.

דוגמה נוספת:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מטרה: לזרדן.

$$\begin{aligned} f_A(x) &= \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 2 \\ -1 & x-2 & 1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = (x-3)(x-2)x + 1 + 2 + (x-3) - x + 2(x-2) = \\ &= x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

לכן נוכל לפרק את המרחב באופן הבא:

$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus \tilde{V}_2 = \ker(A - I) \oplus \ker((A - 2I)^2)$$

לעומת זאת, לא ברור אם יתקיים

$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 = \ker(A - I) \oplus \ker(A - 2I)$$

כעת,

$$\begin{aligned} \ker(A - I) &= \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \ker(A - 2I) &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \ker((A - 2I)^2) &= \ker \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

נחפש ווקטורי בסיס כך שנקבל

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נבחר ווקטורי בסיס $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, שהם ווקטורים עצמיים. כעת נחפש ווקטור v כך שנקבל את הייצוג המטריציוני שלעיל, כלומר

$$Av = 2v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כמובן שהווקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא פיתרון. כעת נבחר

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ונקבל

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

שתי שיטות למציאת בסיס מ'רדן:

נניח כי לטרנספורמציה T יש רק את הערך העצמי λ . נעבוד בעיקר עם $T - \lambda$. נניח תחילה כי מדובר בבלוק ציקלי, כלומר $\dim \ker(T - \lambda) = 1$. שיטה 1: נמצא $u_1 \in \ker(T - \lambda)$, כלומר $Tu_1 = \lambda u_1$. הווקטור הבא צריך לקיים $Tu_2 = \lambda u_2 + u_1$, כלומר יש לפתור את $(T - \lambda | u_1)$. נמשיך באותה צורה ונקבל לכל i כי $Tu_{i+1} = \lambda u_{i+1} + u_i$, כלומר u_{i+1} הוא פתרון של $(T - \lambda | u_i)$.

שיטה 2: נניח כי $(T - \lambda)^n = 0$ אבל $(T - \lambda)^{n-1} \neq 0$. לכן קיים $u_n \in \ker((T - \lambda)^n) \setminus \ker((T - \lambda)^{n-1})$. וקעת נגדיר $u_{n-k} = (T - \lambda)^k u_n$, או באופן שקול $u_k = (T - \lambda)^{n-k} u_n$. לכן, אם ניקח

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

כאשר $\alpha_k \neq 0$, ולכל $j > k$ מתקיים $\alpha_j = 0$, ונפעיל על ווקטור זה את $(T - \lambda)^{k-1}$, נקבל

$$(T - \lambda)^{k-1} u = \alpha_k u_1 \neq 0$$

דוגמא:

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\f_A(x) &= (x-2)^2(x-1) \\ \ker(g_1(A)) &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \ker(g_2(A)) &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

לכן קיבלנו שהפעם המטריצה אכן לכסינה, כאשר

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמא אחרונה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

נשים לב שזוהי מטריצה מלווה של פולינום, ולכן הוא הפולינום המינימלי והאופייני שלה, ולכן

$$f_A(x) = m_A(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

משום שאנחנו יודעים את הפולינום המינימלי, נוכל להסיק ישירות את צורת ז'ורדן של המטריצה:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

למעשה, ניתן להסיק כי הפולינום המינימלי שווה פולינום האופייני אם ורק אם לכל ערך עצמי יש בלוק ז'ורדן יחיד, כלומר אם ורק אם כל בלוק ז'ורדן הוא מקסימלי, כלומר כל $\tilde{V}_\lambda$ עבור λ המתאים.

$$\begin{aligned}
A + I &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \\
(A + I)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
(A + I)^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

נוכל להתחיל על ידי $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ובעת $v = (A + I)w$, $u = (A + I)v$ ונקבל בסיס

מז'רדן בשיטה השנייה; לעומת זאת נוכל להתחיל עם $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, למצוא v כך שמתקיים $(A + I)v = u$, ולמצוא w כך שמתקיים $(A + I)w = v$, ולמצוא בסיס מז'רדן בשיטה השנייה.