

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

29 במרץ 2013

1 פולינום מינימלי

תרגיל: תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 0 & 2 & 109 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

הציגו את A^4 כצירוף לינארי של I, A, A^2 .

טענה 1.1 אם $p \in F[x]$, $p(A) \in \text{span}\{I, A, A^2, \dots\}$ נכתוב

$$p(x) = q(x) \cdot m_A(x) + r(x)$$

עם $\deg r(x) \leq \deg(m_A(x))$. כעת,

$$p(A) = r(A)$$

הטענה נכונה שכן $m_A(A) = 0$.

פתרון התרגיל:

$$m_A(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

כעת, נחלק את x^4 בפולינום המינימלי עם שארית:

$$\begin{aligned} x^4 &= (x+6)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) + (25x^2 - 60x + 36) = \\ &= (x+6)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) + (5x - 6)^2 \end{aligned}$$

לכן מתקיים

$$A^4 = 25A^2 - 60A + 36I = (5A - 6I)^2$$

באותו אופן ניתן לומר

$$\begin{aligned} m_A(A) &= 0 = A^3 - 6A^2 + 11A - 6 \\ A^3 &= 6A^2 - 11A + 6I \\ A^4 &= 6A^3 - 11A^2 + 6A = 6(6A^2 - 11A + 6I) - 11A^2 + 6A = \\ &= 25A^2 - 60A + 36I = (5A - 6I)^2 \end{aligned}$$

תרגיל: תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$, ונתון כי $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של A . הראו כי גם $\bar{\lambda}$ ערך עצמי של A . **הוכחה:** נוכיח בשתי דרכים.

1. יהי $v \in \mathbb{C}^n$ וקטור עצמי המתאים לערך העצמי λ . אזי $Av = \lambda v$ ולכן

$$A \cdot \bar{v} = \bar{A} \cdot \bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v}$$

כמו כן, $v \neq 0$ ולכן גם $\bar{v} \neq 0$, והוא וקטור עצמי שמתאים לערך העצמי $\bar{\lambda}$.

2. נניח כי $\lambda \notin \mathbb{R}$ (אחרת טריוויאלי). מתבונן בפולינום

$$m_\lambda(x) = (x - \lambda)(x - \bar{\lambda}) = x^2 - (\lambda + \bar{\lambda})x + \lambda\bar{\lambda} \in \mathbb{R}[x]$$

בנוסף, זהו פולינום אי-פריק מעל $\mathbb{R}$. לכן מתקיים (נסמן בתור p את הפולינום המינימלי או האופייני - אין הבדל)

$$m_\lambda \mid p$$

שכן λ מאפס את שני הפולינומים, ולכן $(x - \lambda)$ מחלק אותם, ולכן עבור $h(x) = \gcd(p, m_\lambda)$ הוא ממעלה חיובית. כמו כן, $h(x) \in \mathbb{R}$. לכן $h(x) = m_\lambda(x)$, שכן $m_\lambda(x)$ אי-פריק מעל $\mathbb{R}$. בפרט, $h(x) \mid p(x)$, ולכן $\bar{\lambda}$ הוא שורש של $p(x)$.

■

טענה 1.2 אם $p(x) \in F[x]$ אי-פריק, $q(x) \in F[x]$ כלשהו ומתקיים

$$\gcd(p(x), q(x)) \neq 1$$

$$p(x) \mid q(x)$$

תרגיל: נתונה $A \in M_n(\mathbb{Q})$, ונתון כי $\sqrt[3]{2}$ ערך עצמי של A . מה הערך המינימלי האפשרי של n ?

פתרון: 3. נתבונן בפולינום $p(x) = x^3 - 2$, שהוא אי-פריק מעל הרציונאליים. לכן מהטענה הקודמת נובע כי $p(x) \mid m_A, f_A$. בפרט $\deg p(x) = 3 \leq \deg f = n$. מצד שני, עבור

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

שהיא הטריצה המלווה של $p(x)$, מתקיים $f_A(x) = p(x)$, וכעת $\sqrt[3]{2}$ ערך עצמי של A , ולכן המינימום הוא 3.

מסקנה 1.3 אם $\sqrt[3]{2}$ הוא ערך עצמי של $A \in M_n(\mathbb{Q})$, אזי גם $\sqrt[3]{2} \cdot \omega$, $\sqrt[3]{2} \cdot \omega^2$ גם $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. זאת משום שאלה השורשים של $x^3 - 2$, שמחלק את הפולינום האופייני. יותר מכך, יש להם את אותם ריבויים אלגבריים בפולינום אופייני ובפולינום המינימלי, והם שווים לריבויים של $x^3 - 2$ בפירוק מעל $\mathbb{Q}$. בנוסף, גם הריבויים הגיאומטריים שלהם זהים.

טענה 1.4 אם $2 \leq \deg p(x) \leq 3$ אזי $p(x)$ אי פריק בחוג $F[x]$ אם ורק אם אין לו שורשים בשדה F .

טענה 1.5 אם לפולינום

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$$

יש שורש רציונאלי $\frac{p}{q}$ (מצומצם), אזי $a_0 \mid p$, $a_n \mid q$.

הוכחה: נציב ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{p}{q}\right)^i \\ 0 &= \sum_{i=0}^n a_i p^i q^{n-i} \end{aligned}$$

ומכאן נקבל

$$\begin{array}{l|l} p & a_0 \cdot q^n \\ q & a_n \cdot p^n \end{array}$$

ומשום שהתחלנו משבר מצומצם, $\gcd(p, q) = 1$, ולכן

$$\begin{array}{l|l} p & a_0 \\ q & a_n \end{array}$$

■

דוגמה: $x^3 - 2$: שורשים חשודים - $1, \frac{p}{q}, 2, q \mid p$, כלומר השורשים האפשריים הם $\pm 1, \pm 2$. אבל:

$$\begin{aligned} p(-1) &= -3 \\ p(1) &= -1 \\ p(-2) &= -10 \\ p(2) &= 6 \end{aligned}$$

לכן אין שורשים רציונאליים, והפולינום אי פריק.

טענה 1.6 (קריטריון אייזנשטיין) אם

$$f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$$

וקיים p ראשוני כך שמתקיים

$$p \mid a_0, \dots, a_{n-1}$$

אבל גם p^2 אינו מחלק את a_0 , אזי $f(x)$ אי פריק מעל $\mathbb{Q}$.

תרגיל: נתונה מטריצה $A \in M_9(\mathbb{Q})$ ונתון כי $m_A(x) = x^3 - 6x^2 + 4x - 2$. מצאו את $f_A(x)$.

פתרון: נשים לב כי לפי קריטריון אייזנשטיין עם $p = 2$, m_A אי פריק. כמו כן, $m_A \mid f_A$, ולכן $m_A^9 \mid f_A$. f_A הוא חזקה של m_A . כעת ידוע כי $\deg f_A = 9$, ולכן $f_A = m_A^3$. **וריאציה:** נתונה $A \in M_8(\mathbb{Q})$ עם $m_A = (x^2 - 3)(x^2 - 2)$. מצאו את כל האפשרויות עבור f_A .

פתרון: שוב, $m_A \mid f_A \mid m_A^8$, ולכן

$$f_A = (x^2 - 2)^{d_2} (x^2 - 3)^{d_3}$$

כאשר $1 \leq d_2, d_3 \leq 8$ וכן $\deg f_A = 8 = 2d_2 + 2d_3$, כלומר $4 = d_2 + d_3$, ולכן

$$(d_2, d_3) \in \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

נראה שכל האפשרויות הללו אפשריות. זאת עושים על ידי בלוקים:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

הפולינומים המינימליים של הבלוקים הללו הם $x^2 - 2, x^2 - 3$ בהתאמה (כי אלה המטריצות המלוות של הפולינום). לכן בחירת d_2 בלוקים של A_2 ובחירת d_3 בלוקים של A_3 , נקבל את האפשרויות שרצינו.

1.1 קונספט

יהיו $F \subseteq K$ שדות.

1. $v_1, \dots, v_m \in F^n \subseteq K^n$ בלתי תלויים מעל F אם ורק אם הם בלתי תלויים מעל K .

2. אם $v_1, \dots, v_m \in F^n \subseteq K^n$ אזי $v \in \text{span}_F \{v_1, \dots, v_m\}$ אם ורק אם $v \in \text{span} \{v_1, \dots, v_m\}$.

3. לכל $f, g \in F[x]$ אזי $g \mid f$ בחוג $F[x]$ אם ורק אם $f \mid g$ בחוג $K[x]$.

4. אם $h, f, g \in F[x]$ אזי $h = \gcd(f, g)$ מעל F אם ורק אם $h = \gcd(f, g)$ מעל K .

כל הטענות הללו הן טענות על דברים שניתן לבדוק אלגוריתמית - דירוג מטריצה, חילוק עם שארית. באלגוריתמים אלה מפעילים רק חיבור וכפל עם סקלרים בשדות.