

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

31 במאי 2016

1 אופרטורים נורמליים, פירוק ספקטרלי

הגדרה 1.1 T נקראת נורמלית אם $TT^* = T^*T$.

דוגמאות צמודות לעצמן, אנטי-הרמיטיות, אוניטריות ועוד.

תרגיל $T = T_H + T_S$, כאשר $T_H = \frac{T+T^*}{2}$, $T_S = \frac{T-T^*}{2}$, T_H הרמיטית, T_S אנטי הרמיטית. T נורמלית אם ורק אם T_H, T_S מתחלפות.

הוכחה:

$$\begin{aligned}T_S T_H &= \frac{T - T^*}{2} \cdot \frac{T + T^*}{2} = \frac{T^2 - (T^*)^2 + TT^* - T^*T}{4} \\T_H T_S &= \frac{T^2 - (T^*)^2 + T^*T - TT^*}{4} \\T_H T_S &= T_S T_H \iff TT^* = T^*T\end{aligned}$$

■

מסקנה 1.2 T נורמלית אם ורק אם T_H, T_S ניתנים ללכסון אורתוגונלי סימולטני. זה שקול לפירוק הספקטרלי, לפי אותו בסיס שמלכסן את T_H, T_S . זה שקול לכך שהערכים העצמיים של T_H, T_S הם, בהתאמה, הערכים הממשיים והמדומים של הערכים העצמיים של T .

דוגמה עבור T אוניטרית, יהי v ווקטור עצמי: $Tv = e^{i\theta}v$. כעת

$$\begin{aligned}(T_H^2 - T_S^2)v &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)v = v \\(T_H^2 - T_S^2) &= \left(\frac{T+T^*}{2}\right)^2 - \left(\frac{T-T^*}{2}\right)^2 = \frac{TT^* + T^*T}{2} = \frac{Id + Id}{2} = Id\end{aligned}$$

דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

מייצגת את ההעתקה

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \cdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}$$

מטריצה זו היא נורמלית, שכן היא אוניטרית:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

כמו כן, העמודות הן פרמוטציה של הבסיס הסטנדרטי. כמו כן,

$$f_A(x) = x^n - 1 = \prod_{j=0}^{n-1} (x - \omega^j), \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

הווקטור העצמי שמתאים לערך העצמי $\omega^k = \lambda_k$ הוא

$$v_{\omega^k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}, T v_{\omega^k} = \begin{pmatrix} \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \\ 1 = \omega^{nk} \end{pmatrix} = \omega^k v_{\omega^k}$$

וכעת

$$\langle v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2} \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_1^j \overline{\lambda_2^j} = \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_1 \overline{\lambda_2})^j = \begin{cases} n & \lambda_1 = \lambda_2 \\ 0 & \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

לכן, אם ניקח

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix} \right\}_{k=0}^{n-1}$$

נקבל בסיס אורתונורמלי שמלכסן את A/T . מטריצת המעבר היא

$$U = (\omega^{ij})_{i,j=0}^{n-1}$$

וכעת

$$A = U \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix} U^{-1}$$

דוגמה נתבונן במטריצה

$$\tilde{A} = A_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_n & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} \\ \lambda_{n-1} & \lambda_n & \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \dots & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

כעת, ניתן לראות כי

$$\tilde{A}\tilde{A}^* = \left(\sum \lambda_{k-i} \overline{\lambda_{k-j}} \right)_{i,j} = \tilde{A}^* \tilde{A}$$

דרך נוספת לראות נורמליות:

$$\tilde{A} = \sum \lambda_i A^{i-1} = p(A), p = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^{i-1}$$

וכעת, יש לנו טענה כללית:

טענה 1.3 אם T נורמלית, אזי $p(T)$ נורמלית.

הוכחה: מתחלפת עם T^* , וכן $p(T)^* = \overline{p}(T^*)$, שכן זה נכון לכל מונום בנפרד, ולכן כל החזקות של T, T^* מתחלפות. מכאן נקבל כי $p(T)$ מתחלף עם $p(T)^* = \overline{p}(T^*)$. ■

ישנה עוד הוכחה: **הוכחה:** ניקח בסיס אורתונורמלי B שמלכסן את T , כלומר $[T]_B = D$ אלכסונית, ולכן $[p(T)]_B = p(D)$ גם היא אלכסונית. ■

נקבל מכאן שאותו בסיס שלכסן את A ילכסן את $\tilde{A}$, ונקבל

$$\tilde{A} = U \begin{pmatrix} p(1) & & & \\ & p(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\omega^{n-1}) \end{pmatrix} U^{-1}$$

הסתכלות אלטרנטיבית: אם נתבונן בחוג הפולינומים $\mathbb{C}[x]$ מדולו הפולינום $x^n - 1$, אזי A^t שלנו מייצגת כפל בפולינום x בחוג. המטריצה $\widehat{A^t}$ מייצגת כפל בפולינום $p(x)$.

דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמה במרחב $\mathbb{C}_{n-1}[x]$, עם

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \bar{q}(x) dx$$

$-T$ העתקת הנגזרת. ניקח $p_0, \dots, p_{n-1}$ בסיס אורתונורמלי, שבו p_i מדרגה i . p'_i הוא כפולה של p_{i-1} .

תרגיל מתי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ נורמלית?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & \bar{a}b + \bar{c}d \\ a\bar{b} + c\bar{d} & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}$$

$$|a|^2 + |c|^2 = |a|^2 + |b|^2 \iff |c| = |b|$$

$$a\bar{c} + b\bar{d} = \bar{a}b + \bar{c}d$$

$$b(\bar{d} - \bar{a}) = \bar{c}(d - a)$$

$$\frac{b}{\bar{c}} = \frac{d - a}{\overline{(d - a)}} \vee b = c = 0 \vee a = d$$

קיבלנו שלוש משפחות:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & re^{i\theta_1} \\ re^{i\theta_2} & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & re^{i\theta_1} \\ re^{i\theta_2} & d \end{pmatrix}, \theta_1 + \theta_2 = 2 \arg(d - a)$$

דוגמה

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix} \\ AA^* &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I \\ A^*A &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן $\frac{1}{\sqrt{6}}A$ היא אוניטרית.

טענה 1.4 אם $a = \bar{d}$ וכן A נורמלית, אזי AA^* סקלארית.

הוכחה: $d - a$ מדומה טהור, שכן $a = \bar{d}$, ולכן $b = -\bar{c}$, ולכן נקבל

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

ואכן

$$AA^* = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 + |b|^2 \end{pmatrix}$$

■

נעבור לרעיון כללי. בתחילת הקורס דיברנו על לכסון/זירדון של מטריצות, בו עבדנו עם יחס הדימיון עם מטריצה הפיכה:

$$A = P^{-1}JP$$

וזה שימש להעתקות לינאריות.

בהמשך עברנו לדבר על חפיפה של מטריצות, שוב עם מטריצה הפיכה:

$$A = P^tDP$$

וזה שימש לתבניות בילינאריות.

כעת אנו מדברים על תבניות הרמיטיות, שאותן ניתן לחפוף גם כן עם מטריצה הפיכה:

$$A = P^*BP$$

כעת, לכסון אורתוגונלי הוא מעין איחוד של המושגים הללו. לפי הבסיס האורתונורמלי, ההעתקה אלכסונית, והתבנית שהיא מגדירה היא אלכסונית גם כן.

$$\begin{aligned} Tv_i &= \lambda_i v_i \\ \left\langle T \left(\sum \alpha_i v_i \right), \sum \alpha_i v_i \right\rangle &= \left\langle \sum \alpha_i \lambda_i v_i, \sum \alpha_i v_i \right\rangle = \sum \lambda_i |\alpha_i|^2 \end{aligned}$$