

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

1 במרץ 2016

1 ווקטורים עצמיים וערכים עצמיים

הגדרה 1.1 אם $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית, v ווקטור עצמי אם קיים סקלר λ כך שמתקיים $T(v) = \lambda v$. סקלר זה נקרא הערך העצמי של v .

ההגדרה זהה עבור מטריצות:

$$Av = \lambda v$$

כמו כן, אם $A = [T]_B$ אז יש להן את אותם ערכים עצמיים, כלומר v ווקטור עצמי של T אם ורק אם $[v]_B$ ווקטור עצמי של A .

דוגמאות:

1.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 2 \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1 \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 3 \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

4. העתקת השיקוף:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1 \\ v_2 &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

אם נסמן T_θ את העתקה ההכפלה במטריצה A (שיקוף ביחס לישר שזוויתו מציר x היא θ) וכן נסמן $B_\theta = \{v_1, v_2\}$ נקבל

$$[T_\theta]_{B_\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. העתקת הסיבוב:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

עבור $\theta = 0$, נקבל

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וכעת כל ווקטור הוא ווקטור עצמי עם ערך עצמי 1.
עבור $\theta = \pi$, נקבל

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

וכעת כל ווקטור הוא ווקטור עצמי עם ערך עצמי -1.
לכל ערך אחר של θ , אין ווקטורים עצמיים.

.6

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 2 \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

.7

$$\begin{aligned} T : p(x) &\rightarrow p'(x) \\ v &= c, \lambda = 0 \\ A_T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

.8

$$\begin{aligned} T : p(x) &\rightarrow ((x+1)p(x))' \\ v_i &= (x+1)^i \\ A_T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כיצד נמצא את הווקטור העצמי שמתאים לערך עצמי מסויים? למשל, עם המטריצה

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ והערך העצמי } 2:$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

וכעת פותרים את מערכת המשוואות.
נשים לב שהעובדה שמספר λ הוא ערך עצמי שקולה לכך שמתקיים

$$\ker(A - \lambda I) \neq \{\theta\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$$

וכך נמצא ערכים עצמיים כלליים.
דוגמאות נוספות: נעבוד במרחב $\mathbb{C}^2$:

1.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1 + i \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 1 - i \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = i \\ v_2 &= \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -i \end{aligned}$$

זהו למעשה סיבוב בזווית $\theta = \frac{\pi}{2}$, שמעל הממשיים לא היו לו ווקטורים עצמיים - אבל מעל המרוכבים יש לו.

אם A מטריצה ממשית שיש לה ווקטור עצמי מרוכב עם ערך עצמי ממשי, קיים ווקטור ממשי שגם הוא ווקטור עצמי עם אותו ערך עצמי. זאת משום שתוך דירוג של $A - \lambda I$ כדי למצוא את הווקטור שפותר את מערכת המשוואות, עושים פעולות רק בממשיים, ולכן אם קיים פיתרון, קיים גם פיתרון ממשי.

אם $[T]_B$ מטריצה אלכסונית שמייצגת את T בבסיס כלשהו, אזי מתקיים

$$\begin{aligned} [T]_B &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \operatorname{tr}(T) &= \operatorname{tr}([T]_B) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ \det(T) &= \det([T]_B) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \end{aligned}$$

לדוגמא:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = a + b \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = a - b \\ \operatorname{tr}(A) &= 2a = a + b + a - b = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(A) &= a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \end{aligned}$$