

אלגברה לינארית 2א

© ארזים

25 בפברואר 2016

1 הקדמה - סדרת פיבונאצ'י

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכן, אם נמצא דרך לחשב חזקות של כל מטריצה נתונה, נדע לחשב באופן מדויק את האיבר הכללי של סדרת פיבונאצ'י.

2 ווקטורים וערכים עצמיים

הגדרה 2.1 יהי F שדה, V מרחב ווקטורי מעל F , ותהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית. ווקטור $\theta = v \in V$ ייקרא ווקטור עצמי (ו"ע) של הטרנספורמציה T אם קיים סקלר $\lambda \in F$ כך שמתקיים

$$T(v) = \lambda v$$

נשים לב שעבור $v = \theta$, מתקיים $Tv = \lambda v$ לכל סקלר $\lambda \in F$, שכן $T(\theta) = \theta$. לכן את θ לא רואים כווקטור עצמי. מצד שני, כאשר $v \neq \theta$, הסקלר λ נקבע באופן יחיד:

$$\begin{cases} T(v) = \lambda_1 v \\ T(v) = \lambda_2 v \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow^{v \neq \theta} \lambda_1 = \lambda_2$$

הגדרה 2.2 סקלר λ כזה נקרא ערך עצמי (ע"ע) של הווקטור v .

נוכל גם להגיד שסקלר λ הוא ערך עצמי של T בלי להתייחס לווקטור עצמי. בזאת אומרים שיש $v \in V$ כך שמתקיים $T(v) = \lambda v$.
נשים לב שאם v ווקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ , אזי לכל סקלר $c \in F$, הווקטור $u = cv$ הוא גם ווקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ :

$$T(u) = T(cv) = cT(v) = c(\lambda v) = \lambda(cv) = \lambda u$$

הגדרה 2.3 תהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית, ויהי $\lambda \in F$. נגדיר את המרחב העצמי המתאים לערך עצמי λ :

$$V_\lambda = \{v \mid T(v) = \lambda v\}$$

במרחב זה נמצאים כל הווקטור עצמי במרחב V עם ערך עצמי λ בתוספת ווקטור האפס.

משפט 2.4 לכל $\lambda \in F$, V_λ הוא תת-מרחב של V .

הוכחה: דרך אחת: לבדוק ישירות סגירות לחיבור וכפל בסקלר. דרך אחרת: תהי $I : V \rightarrow V$ טרנספורמציה זהות, λI טרנספורמציה הכפל בסקלר λ . אזי את V_λ ניתן לתאר על ידי $V_\lambda = \ker(T - \lambda I)$. אמנם:

$$(T - \lambda I)(v) = \theta \iff T(v) - \lambda v = \theta \iff T(v) = \lambda v$$

■

הגדרה 2.5 תהי $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית, $\lambda \in F$. הריבוי הגיאומטרי של λ ביחס לטרנספורמציה T מוגדר להיות המימד של V_λ .

בהינתן טרנספורמציה לינארית T המצב האופטימאלי הוא כשניתן למצוא בסיס למרחב הווקטורי V שמורכב מווקטורים עצמיים של T . במצב הזה, המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס זה היא אלכסונית.

הגדרה 2.6 אם עבור טרנספורמציה לינארית $T : V \rightarrow V$ קיים בסיס למרחב V שמורכב מווקטורים עצמיים של T , אומרים שהטרנספורמציה T לכסינה. אומרים גם שהטרנספורמציה T ניתנת ללכסון.

משפט 2.7 תהי $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית, ותהי $A \subseteq V$ קבוצת ווקטורים שכולם ווקטורים עצמיים של T עם ע"ע שונים זה מזה. אזי A בלתי תלויה לינארית.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת תלות לינארית בין איברי A . מבין כל הצירופים הלינאריים הלא-טריוויאליים של איברי A שמתאפסים, נבחר את זה שמערב מספר מינימלי של איברי A . נסמן את מספר ווקטורים בתלות כזו m . נשים לב שבהכרח $m \geq 2$ - אם $m = 1$, התלות היא מהצורה $cv = \theta$, כאשר $c \neq 0$ (כי מדובר בצירוף לינארי לא-טריוויאלי) וכן $v \neq \theta$ (שכן הוא ווקטור עצמי), וזו סתירה. כעת נראה שאפשר לייצר תלות לינארית בין איברי A בעלת אורך קטן יותר, בסתירה למינימליות m . תהי

$$\sum_{i=1}^m a_i v_i = \theta$$

תלות לינארית באורך m . ברור שלכל $1 \leq i \leq m$, $a_i \neq 0$ - אחרת נזרוק את המחובר שמספרו i ונקבל תלות קצרה יותר. כעת נפעיל את הטרנספורמציה הלינארית T על התלות שלנו:

$$T(\theta) = \theta = T\left(\sum_{i=1}^m a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^m a_i T(v_i) = \sum_{i=1}^m a_i \lambda_i v_i$$

מצד שני, נכפיל את התלות המקורית בסקלר λ_m :

$$\theta = \sum_{i=1}^m a_i \lambda_m v_i$$

בסך הכל, קיבלנו:

$$\begin{cases} \theta = \sum_{i=1}^m a_i \lambda_i v_i \\ \theta = \sum_{i=1}^m a_i \lambda_m v_i \end{cases}$$

$$\theta = \sum_{i=1}^m a_i (\lambda_i - \lambda_m) v_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i (\lambda_i - \lambda_m) v_i$$

וזהו צירוף לינארי לא-טריוויאלי, שכן לכל $1 \leq i \leq m-1$, $\lambda_i \neq \lambda_m$. קיבלנו, אם כן, תלות לינארית באורך $m-1$, בסתירה למינימליות m . ■