

אלגבראות לי

© ארזים

17 ביוני 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 מערכת השורשים באלגברת לי פשוטה למחצה ביחס לתת אלגברת קרטן מתפצלת מעל השדה

בשיעור הקודם דיברנו על מערכת שורשים - תת קבוצה R של מרחב מכפלה פנימית E מממד סופי מעל $\mathbb{R}$ שמקיימת את הדרישות הבאות:

1. $R \subset E$ סופית ופורשת את R, E . $0 \notin R$.

2. לכל $\alpha \in R$ גם $-\alpha \in R$, וכן $\pm\alpha$ הן הכפולות היחידות של α שנמצאות בתוך R .

3. לכל $\alpha \in R$, השיקוף $s_\alpha(R) = R$, כאשר הגדרנו

$$s_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

4. לכל $\alpha, \beta \in R$, המספרים $2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$ הם שלמים.

היום נראה כל מיני תוצאות שונות ומשונות על זה.

טענה 1.1 יהיו $\alpha, \beta \in R$ לא פרופורציוניים.

1. אם $(\alpha, \beta) > 0$ (זווית חדה), אזי $\alpha - \beta \in R$.

2. אם $(\alpha, \beta) < 0$ (זווית קהה), אזי $\alpha + \beta \in R$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) &= \|\alpha\| \|\beta\| \cos \theta \\ \frac{2(\alpha, \beta)}{\|\alpha\|^2} &= \frac{2\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos \theta \in \mathbb{Z} \\ \frac{2(\alpha, \beta)}{\|\beta\|^2} &= \frac{2\|\alpha\|}{\|\beta\|} \cos \theta \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

נכפול את שני האחרונים ונקבל

$$4 \cos^2 \theta \in \mathbb{Z}$$

כלומר נקבל כי

$$4 \cos^2 \theta \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

α, β לא פרופורציוניים, כלומר $\cos \theta \neq \pm 1$. נקבל כי בהכרח

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}, \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \{1, 2, 3\}$$

לא משנה איזה מהם, בעזרת השיקופים נוכל לקבל כי $\beta - \alpha$ או $\alpha - \beta$ שורש. סעיף 2 נובע
 מהסעיף הזה כאשר לוקחים $-\beta$. ■

טענה 1.2 כרגיל, יש רצף מספרים שלמים $[-r, q]$ כך שכל שלם שם m מקיים

$$\beta + m\alpha \in R$$

הוכחה: אחרת, ניקח i להיות כזה שלא מקיים את זה. יש $-r < l \leq i \leq s < q$ שמקיימים

$$\beta + s\alpha \notin R$$

$$\beta + (s+1)\alpha \in R$$

$$\beta + l\alpha \notin R$$

$$\beta + (l-1)\alpha \in R$$

אם כן,

$$\beta + (s+1)\alpha, \alpha \in R$$

$$\beta + s\alpha \notin R$$

מהטענה הקודמת נקבל כי

$$(\beta + (s+1)\alpha, \alpha) \leq 0$$

באותה צורה נקבל כי

$$(\beta + (l-1)\alpha, \alpha) \geq 0$$

ולכן

$$0 \leq (\beta + (l-1)\alpha, \alpha) = (\beta, \alpha) + (l-1)\|\alpha\|^2 < (\beta, \alpha) + (s+1)\|\alpha\|^2 = (\beta + (s+1)\alpha, \alpha) \leq 0$$

■

בסתירה.

נסמן את השרשת

$$S_{\beta, \alpha} = \{\beta - r\alpha, \beta + (-r+1)\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \dots, \beta + q\alpha\}$$

וכעת מתקיים

$$s_\alpha(S_{\beta,\alpha}) = S_{\beta,\alpha}$$

שכן

$$\begin{aligned} s_\alpha(\beta + m\alpha) &= s_\alpha(\beta) + ms_\alpha(\alpha) = s_\alpha(\beta) - m\alpha = \\ &= m - \left(\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} + m \right) \alpha \in S_{\beta,\alpha} \end{aligned}$$

המספר בסוגריים שלם מהתכונות, וזה שייך לשרשרת בגלל שזה שורש (תמונה של שורש תחת שיקוף). ברור כי s_α הופך את כיוון השרשרת, ולכן s_α שולח את הקצה השמאלי לקצה הימני:

$$\begin{aligned} s_\alpha(\beta - r\alpha) &= \beta + q\alpha \\ \beta - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}\alpha + r\alpha &= \beta + r\alpha \\ r - q &= \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \end{aligned}$$

טענה 1.3 האורך של $S_{\beta,\alpha}$ הוא לכל היותר 4.

הוכחה: נסמן $\beta' = \beta - r\alpha$. נתבונן בשרשרת α דרך β' :

$$\beta', \beta' + \alpha, \dots, \beta' + (q+r)\alpha$$

כאן $r' = 0$, $q' = q + r$. כעת

$$-(q+r) = r' - q' = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$$

כלומר $(q+r) < 4$, כלומר

$$|S_{\alpha,\beta}| = q + r + 1 \leq 4$$

■

הגדרה 1.4 תת קבוצה $\Delta \subset R$ תקרא בסיס למערכת השורשים R אם היא מקיימת:

1. Δ בסיס של E מעל $\mathbb{R}$.

2. לכל $\alpha \in R$, כאשר נכתוב

$$\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$$

אזי המקדמים c_γ שלמים כולם וכן $c_\gamma \geq 0$ לכל $\gamma \in \Delta$ או $c_\gamma \leq 0$ לכל $\gamma \in \Delta$.

דוגמא בשיעור שעבר דיברנו על $A_n = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ במרחב $E = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 0\}$ ניקח

$$\Delta = \{e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$$

זה בסיס של E , וגם של R - שכן

$$e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \dots + (e_{j-1} - e_j)$$

אם $i < j$, למשל.

אם $R \subset \Delta$ אזי לכל $\alpha \neq \beta \in \Delta$ ההפרש $\alpha - \beta \notin R$, ומהטענה הקודמת נקבל $(\alpha, \beta) \leq 0$.

משפט 1.5 קיים למערכת השורשים R בסיס.

הוכחה: לכל $\alpha \in R$ נסמן

$$P_\alpha = \alpha^\perp = \{v \in E \mid (v, \alpha) = 0\}$$

ווקטורים

$$\gamma \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in R} P_\alpha$$

נקראים **רגולרים** ומקיימים $(\gamma, \alpha) \neq 0$ לכל $\alpha \in R$. נכתוב

$$R^+(\gamma) = \{\alpha \in R \mid (\gamma, \alpha) > 0\}$$

$$R^-(\gamma) = \{\alpha \in R \mid (\gamma, \alpha) < 0\}$$

כאשר γ כמובן רגולרי. אזי

$$R = R^+(\gamma) \sqcup R^-(\gamma)$$

כעת, יהי $\gamma \in E$ רגולרי. נתבונן בקבוצה

$$\Delta(\gamma) = \{\alpha \in R^+(\gamma) \mid \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R^+(\gamma) \quad \alpha \neq \alpha_1 + \alpha_2\}$$

כלומר שורשים שאי אפשר לכתוב כסכום של שניים אחרים (מתוך $R^+(\gamma)$). כעת יהי $\alpha_0 \in R^+(\gamma)$ עבורו (γ, α_0) מינימלית. ברור כי $\alpha_0 \in \Delta(\gamma)$ ולכן $\Delta(\gamma) \neq \emptyset$.

1. כל שורש מתוך $R^+(\gamma)$ הוא צרף לינארי של איברי $\Delta(\gamma)$ במקדמים מתוך $\mathbb{Z}^+$. אם זה לא כך, נבחר $\alpha_1 \in R^+(\gamma)$ שאינו צירוף כזה, עבורו (γ, α_1) מינימלית. כמובן, $\alpha_1 \notin \Delta(\gamma)$, ולכן אפשר לכתוב $\alpha_1 = \alpha'_1 + \alpha''_1$, כאשר $\alpha'_1, \alpha''_1 \in R^+(\gamma)$. מתקיים $(\gamma, \alpha'_1), (\gamma, \alpha''_1) < (\gamma, \alpha_1)$ ולכן אפשר להציג את α'_1, α''_1 כצירוף שתיארנו קודם, וזו סתירה.

2. $\Delta(\gamma)$ בלתי תלוייה מעל $\mathbb{R}$. מראים כי לכל $\alpha \neq \beta \in \Delta(\gamma)$ מתקיים $(\alpha, \beta) \leq 0$, כי אחרת, מהטענה הראשונה היום, $\alpha - \beta \in R$, כלומר $\alpha - \beta \in R^+(\gamma)$ או $\alpha - \beta \in R^-(\gamma)$. אם הראשון נכון אזי

$$\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$$

פירוק של α לסכום של שני איברי $R^+(\gamma)$ בסתירה (הוא מתוך $\Delta(\gamma)$). במקרה השני נקבל פירוק של β וסתירה גם כן. **תרגיל:** בהינתן העובדה כי $(\alpha, \beta) \leq 0$ לכל $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ להוכיח כי $\alpha \neq \beta$ להוכיח כי $\Delta(\gamma)$ בלתי תלוייה (כותבים תלות, מבודדים מקדמים חיוביים ושליילים, מחשבים נורמה על ידי מכפלה פנימית של שני האגפים, ונקבל סכום של דברים אי שליליים ששווים אפס).

בסך הכל קיבלנו כי $\Delta(\gamma)$ בסיס של R . קל להראות שכך נראה כל בסיס (נבנה מאיבר רגולרי). ■

נקבע בסיס $\Delta \subset R$ למערכת. נסמן R^+ את איברי R שהמקדמים בצירוף שלהם מאיברי Δ הם חיוביים. נסמן גם $R^- = -R^+$ בהתאם. איברי Δ נקראים שורשים פשוטים, איברי R^+ שורשים חיוביים, ואיברי R^- שורשים שליליים.

טענה 1.6 יהי $\alpha \in R^+ \setminus \Delta$. אזי יש $\beta \in \Delta$ שעבורו $\alpha - \beta \in R^+$.

הוכחה: נכתוב

$$\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} a_\beta \beta$$

כאשר a_β שלמים אי-שליליים שלא כולם אפס. יש לפחות $\beta_1, \beta_2 \in \Delta$ שעבורם $a_{\beta_1}, a_{\beta_2} > 0$ כעת

$$0 < \|\alpha\|^2 = \sum_{\beta \in \Delta} a_\beta (\beta, \alpha)$$

כלומר יש $\beta_0 \in \Delta$ כלשהו עבורו $a_{\beta_0} (\beta_0, \alpha) > 0$, ומכאן $a_{\beta_0} > 0$ וכן $(\beta_0, \alpha) > 0$. מהטענה הראשונה נקבל כי $\alpha - \beta_0 \in R^-$ כעת

$$\alpha - \beta_0 = (a_{\beta_0} - 1) \beta_0 + \sum_{\beta_0 \neq \beta \in \Delta} a_\beta \beta$$

ולכן יש $\beta_0 \neq \beta \in \Delta$ כלשהו עבורו $a_\beta \geq 1$, כי $\alpha \in R^+ \setminus \Delta$. לכן נקבל שגם כל שאר המקדמים הם שלמים חיוביים, ולכן $\alpha - \beta_0 \in R^+$. ■

מסקנה 1.7 באינדוקציה על הגובה של $\alpha \in R^+$ - הגובה הוא

$$\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} a_\beta \beta$$

$$ht(\alpha) = \sum_{\beta \in \Delta} a_\beta$$

אפשר להציג

$$\alpha = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k}$$

כסכום של שורשים פשוטים, כך שלכל $1 \leq m \leq k$ מתקיים

$$\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_m} \in R$$

השייכות האחרונה כמובן מיד אומרת שייכות גם אל R^+ .

טענה 1.8 יהי $\alpha \in \Delta$. אזי

$$s_\alpha(R^+ \setminus \{\alpha\}) = R^+ \setminus \{\alpha\}$$

הוכחה: יהי $\gamma \in R^+$. נכתוב

$$\gamma = \sum_{\beta \in \Delta} a_\beta \beta$$

כאשר $a_\beta \geq 0$ שלמים. יש $\alpha \neq \beta_0$ עבורו $a_{\beta_0} \geq 1$, ואז

$$s_\alpha(\gamma) = \gamma - \frac{2(\gamma, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in R$$

באיבר הזה המקדם a_{β_0} נשאר ללא שינוי, כלומר הוא עדיין חיובי - כלומר $s_\alpha(\gamma) \in R^+$.
כמוכן $s_\alpha(\gamma) \neq \alpha$, כי $s_\alpha(-\alpha) = \alpha$ והשיקוף חד-חד-ערכי (וכמוכן $\gamma \neq -\alpha$). לכן

$$s_\alpha(\gamma) \in R^+ \setminus \{\alpha\}$$

■

קבוצת האיברים הרגולריים

$$E \setminus \bigcup_{\alpha \in R} P_\alpha$$

היא פתוחה בתוך E . נכתוב אותה כאיחוד של המרכיבים הקשירים. המרכיבים הללו נקראים **חדרי וייל (Weyl Chambers)**. **החדר היסודי** (ביחס לבסיס Δ) הוא

$$C(\Delta) = \{v \in E \mid (v, \alpha) > 0 \forall \alpha \in \Delta\}$$

לכל $w \in W$ מתקיים

$$w(P_\alpha) = P_{w(\alpha)}$$

כאשר $w(\alpha) \in R$ כמוכן. מכאן, W פועלת על $E \setminus \bigcup P_\alpha$ ולכן מעבירה מרכיב קשיר למרכיב קשיר.

משפט 1.9 (ללא הוכחה)

1. יהי γ רגולרי. אזי יש $w \in W$ שעבורו $(w(\gamma), \alpha) > 0$ לכל $\alpha \in \Delta$, כלומר $w(\gamma) \in C(\Delta)$.

2. חבורת וייל W פועלת טרנזיטיבית על חדרי וייל.

3. חבורת וייל פועלת טרנזיטיבית על קבוצת בסיסי R .

4. $W(\Delta) = R$, כלומר לכל $\alpha \in R$ יש $w \in W$ שעבורו $w(\alpha) \in \Delta$.

5. W נוצרת על ידי $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$.

הגדרה 1.10 נרשום $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. מטריצת קרטן של המערכת היא המטריצה

$$\left(\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \right)_{i,j \leq n}$$

אין תלות בבחירת הבסיס Δ , כי אם ניקח בסיס אחר $\Delta' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$, סעיף 3 במשפט הקודם אומר שיש $w \in W$ עבורו $\alpha'_i = w(\alpha_i)$, ואז

$$\frac{2(\alpha'_i, \alpha'_j)}{(\alpha'_i, \alpha'_i)} = \frac{2(w(\alpha_i), w(\alpha_j))}{(w(\alpha_i), w(\alpha_i))} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

בהינתן מטריצת קרטן של המערכת R אפשר לשחזר את כל איברי R בעזרת אלגוריתם סגור ומסודר (שלא נכתוב כאן).

דוגמה מטריצת קרטן של מערכת שורשים G_2 היא

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

נסמן $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. אלה השורשים מגובה 1. מגובה 2: אנחנו יודעים כי

$$\frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = -1$$

המספר הזה שווה $r - q$ עבור שרשרת השורשים α_1 דרך α_2 . $r = 0$. בהכרח, כי אלה איברי בסיס, ולכן $q = 1$. לכן בהכרח $\alpha_2 + \alpha_1 \in R$. יש לנו גם שרשרת α_2 דרך α_1 , שעבורה $\frac{2(\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = -3 = -q = -r - q = -3$, כלומר $q = 3$, כלומר

$$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2 \in R$$

מצאנו עד עכשיו חמישה שורשים חיוביים. מגובה 2 כמובן שיש רק את $\alpha_1 + \alpha_2$. אם α שורש מגובה 3 אזי $\alpha - \alpha_1$ שורש מגובה 2 או $\alpha - \alpha_2$ שורש מגובה 2. כלומר $\alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2$ או $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2$. אנחנו יודעים שבהכרח מדובר במקרה השני כי רשמנו את שתי השרשראות, והראשון לא ייתכן. לכן יש רק שורש אחד מגובה 3. באותה צורה אם α מגובה 4 אז $\alpha = \alpha_1 + 3\alpha_2$. נרצה לדעת האם יש שורש מגובה 5: או $\alpha - \alpha_1 = \alpha_1 + 3\alpha_2$ או $\alpha - \alpha_2 = \alpha_1 + 3\alpha_2$. המקרה השני לא ייתכן שוב בגלל השרשראות שראינו. המקרה הראשון ייתן לנו $\alpha = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$, אבל לא ברור שזה שורש. כדי לוודא שזה שורש, כותבים

$$\alpha = (\alpha_1 + 3\alpha_2) + \alpha_1$$

כלומר נרצה את הסימן של $(\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_1)$. נחשב את הסימן (הזהה) של

$$\frac{2(\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = \frac{2(\alpha_1, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} + \frac{6(\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = 2 - 3 = -1 < 0$$

כלומר הסכום α אכן שורש. גובה 6: אפשריים רק

$$3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 3(\alpha_1 + \alpha_2)$$

זו כפולה של שורש ולכן לא שורש, או

$$2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 2(\alpha_1 + 2\alpha_2)$$

וגם זו כפולה של שורש ולכן לא שורש. אם כן,

$$R^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2\}$$

$$R^- = -R^+$$

בצורה דומה אפשר מכל מטריצת קרטן לחשב את כל מערכת השורשים.

נחזור כעת לאלגבראות לי פשוטות למחצה. נניח כי L אלגברת לי פשוטה למחצה, $H \subset L$ תת אלגברת קרטן מתפצלת ביחס לשדה, $R = R(L, H)$ מערכת השורשים, ונבחר בסיס $\Delta \subset R$ של מערכת השורשים, שנסמן אותו

$$\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

נזכר שלכל שורש יש לנו האיברים $x_{\alpha_i}, h_{\alpha_i}, x_{-\alpha_i}$ - הקבוצה

$$\bigcup_{i=1}^n \{x_{\alpha_i}, h_{\alpha_i}, x_{-\alpha_i}\}$$

זו קבוצה של $3n$ איברים שיוצרת את L כאלגברת לי. נזכור שכמובן אפשר לכתוב

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} L^\alpha \right)$$

ראינו שאם $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$ אזי

$$[L^\alpha, L^\beta] = L^{\alpha+\beta}$$

יהיו $\alpha \in R^+$ נכתוב

$$\alpha = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k}$$

כך שלכל $1 \leq m \leq k$ מתקיים

$$\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_m} \in R^+$$

אזי

$$[L^{\alpha_{i_1}}, L^{\alpha_{i_2}}] = L^{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}} = F[x_{\alpha_{i_1}}, x_{\alpha_{i_2}}]$$

$$[L^{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}}, L^{\alpha_{i_3}}] = L^{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3}} = F[[x_{\alpha_{i_1}}, x_{\alpha_{i_2}}], x_{\alpha_{i_3}}]$$

$$\vdots$$

$$L^\alpha = F[\dots [[x_{\alpha_{i_1}}, x_{\alpha_{i_2}}], x_{\alpha_{i_3}}], \dots, x_{\alpha_{i_k}}]$$

ובאופן דומה עושים עבור $L^{-\alpha}$. מקבלים גם בסיס לינארי של L מעל F - כל $\alpha \in R^+$ תורם את האיבר

$$\left[\dots \left[\left[x_{\alpha_{i_1}}, x_{\alpha_{i_2}} \right], x_{\alpha_{i_3}} \right], \dots, x_{\alpha_{i_k}} \right]$$

וכל איבר $\alpha \in R^-$ תורם בהתאמה את האיבר

$$\left[\dots \left[\left[x_{-\alpha_{i_1}}, x_{-\alpha_{i_2}} \right], x_{-\alpha_{i_3}} \right], \dots, x_{-\alpha_{i_k}} \right]$$

יחד עם האיברים h_α נקבל שהקבוצה שלנו אכן יוצרת את L (ואפילו מצאנו בסיס). מוכיחים כי בעזרת מטריצת קרטן של מערכת השורשים R אפשר לכתוב את טבלת הכפל (קומוטטור) של כל שני איברים בבסיס הזה.

דוגמה בדוגמה שראינו מתוך G_2 , נחשב

$$\begin{aligned} [x_{-\alpha_1}, [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}]] &= [[x_{-\alpha_1}, x_{\alpha_1}], x_{\alpha_2}] + \left[x_{\alpha_1}, \underbrace{[x_{-\alpha_1}, x_{\alpha_2}]}_{\in L^{\alpha_2 - \alpha_1}, \alpha_2 - \alpha_1 \notin R \Rightarrow 0} \right] = -[h_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}] = -\alpha_2(h_{\alpha_1})x_{\alpha_2} = \\ &= -\frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)}x_{\alpha_2} = x_{\alpha_2} \end{aligned}$$

כמסקנה מקבלים:

מסקנה 1.11 תהינה L, L' שתי אלגבראות לי פשוטות למחצה עם תת אלגבראות קרטן $R = R(L, H)$ שמתפצלות מעל F . נניח כי למערכות השורשים $H \subset L, H' \subset L'$ יש אותה מטריצת קרטן. אזי $L \cong L'$, ואפשר לבחור את האיזומורפיזם כך שאם

$$\begin{aligned} \Delta &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \\ \Delta' &= \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\} \end{aligned}$$

אזי לכל שורש $\alpha \in R^+$ נתאים, לפי הייצוג כסכום שראינו למעלה,

$$\left[\dots \left[\left[x_{\alpha_{i_1}}, x_{\alpha_{i_2}} \right], x_{\alpha_{i_3}} \right], \dots, x_{\alpha_{i_k}} \right] \mapsto \left[\dots \left[\left[x_{\alpha'_{i_1}}, x_{\alpha'_{i_2}} \right], x_{\alpha'_{i_3}} \right], \dots, x_{\alpha'_{i_k}} \right]$$

באותה צורה עבור $\alpha \in R^-$, ולכן

$$h_{\alpha_i} \mapsto h_{\alpha'_i}$$

נמשיך. יש לנו בסיס Δ למערכת שורשים $R = R(L, H)$. נאמר כי Δ מתפרק אם אפשר להציג $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ לא ריקות כאשר $\Delta_1 \perp \Delta_2$. אחרת Δ לא מתפרק.

משפט 1.12 Δ לא מתפרק אם ורק אם L אלגברת לי פשוטה.

הוכחה: נראה כיוון אחד, השני יישאר כתרגיל. נניח כי L פשוטה, ונראה כי Δ לא מתפרק. בשלילה, נניח שהוא כן, כלומר נכתוב $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ עם $\Delta_1 \perp \Delta_2$. נסמן R_1 את כל איברי R שהם צירופים לינאריים של איברי Δ_1 . נגדיר

$$L_1 = H_1 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R_1} L^\alpha \right)$$

כאשר $H_1 = \text{Span}(\{h_\alpha \mid \alpha \in \Delta_1\})$. זאת תת אלגברת לי. למעשה, $L_1 \subset L$ אידאל, כי יהי $\alpha \in \Delta_2$, לכל $\beta \in R_1^+$ $\beta - \alpha \notin R$ ולכן

$$[L^\alpha, L^{-\beta}] = 0$$

גם $[L^\alpha, L^\beta] = 0$, כי נסתכל בשרשרת α דרך β - בהכרח $r = 0$ ואז

$$-q = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 0$$

כלומר $\beta + \alpha$ גם כן לא שורש. אם כן, קיבלנו סתירה לפשטות של L , כי מצאנו אידאל לא טריויאלי. כאמור, הכיוון השני - תרגיל. ■

מסקנה 1.13 האלגבראות $\mathfrak{o}_{2n+1}F$, $\mathfrak{sl}_nF$, $\mathfrak{sp}_{2n}F$, $\sigma_{2n}F$ הן פשוטות.

הוכחה:

1. הן פשוטות למחצה (מחשבים תבנית קילינג ורואים שהיא לא מנוונת).
2. מגדירים H שהיא המטריצות האלכסוניות מכל אלגברה. זו תת אלגברת קרטן.
3. מוצאים את $R = R(L, H)$, מוצאים איזשהו בסיס Δ ובודקים שהוא בלתי מתפרק.

■

הגדרה 1.14 דיאגרמת דינקין של R . נבחר בסיס

$$\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

דיאגרמת דינקין היא גרף, שקודקודיו הם איברי Δ . מקשרים את α_i ואת α_j (כאשר $i \neq j$) במספר צלעות השווה

$$\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \cdot \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \in \{0, 1, 2, 3\}$$

אם מספר זה הוא 2 או 3, אז $\|\alpha_i\| \neq \|\alpha_j\|$ ומוסיפים חץ שמצביע על השורש הקצר מבין α_i, α_j .

קל לראות כי Δ בלתי מתפרקת אם ורק אם דיאגרמת דינקין קשירה. נותר עניין קומבינטורי, למיין את דיאגרמות דינקין הקשירות.

1. A_n , שהוא גרף קו (כל קודקוד מחובר לבא אחריו) - זה ממומש בתור $\mathfrak{sl}_nF$.

2. B_n , שהוא גרף קו גם כן, אבל בין $n - 1$ אל n יש 2 קשתות וחץ אל n - זה ממומש בתור $\sigma_{2n+1}F$.
 3. C_n , שדואלי אל B_n , זהה לחלוטין רק שהחץ הוא לכיוון $n - 1$ - זה ממומש בתור $sp_{2n}F$.
 4. D_n , גרף קו עד $n - 2$, שממנו קשת אחת אל $n - 1$ ואחת אל n - זה ממומש בתור $\sigma_{2n}F$.
 5. (מעתה והלאה מדובר ביוצאים מן הכלל) G_2 , שלוש קשתות בין שני קודקודים וחץ אל 1.
 6. F_4 , גרף קו עם 4 קודקודים שבין 2, 3 יש שתי קשתות עם חץ לכיוון 3.
 7. E_6 , גרף קו שבו מדלגים על 2 - 1, 3, 4, 5, 6, וכן קשת בין 2 לבין 4.
 8. E_7 , שזהה לקודם עם התוספת של קודקוד שביעי וקשת בין 6 לבין 7.
 9. E_8 , שזהה לקודם עם התוספת של קודקוד שמיני וקשת בין 7 לבין 8.
- יש עוד תורה יפה מאוד של הצגות של אלגבראות לי פשוטות למחצה. יש גם קשרים מאוד יפים לחבורות האלגבריות ולחבורות לי המתאימות.