

אלגבראות לי

© ארזים

3 ביוני 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 מערכת השורשים באלגברת לי פשוטה למחצה ביחס לתת אלגברת קרטן מתפצלת מעל השדה

היינו באמצע הוכחת משפט. נחזור אליה: **הוכחה:** את סעיף 3 המרצה מחשיב כגמור מהשיעור הקודם (נשארו כמה דברים קלים להראות). נראה את סעיף 4. יהי $x \in L$ איבר פשוט למחצה. תת האלגברה $Fx \subset L$ היא קומוטטיבית, ואיבריה פשוטים למחצה, ולכן $Fx \in \mathcal{E}$, מהסעיף הקודם. לכן יש איבר $H \in \mathcal{E}$ מקסימלי שמכיל את Fx , וראינו כי H אלגברת קרטן. בנוסף, ראינו כי $L^0(x) = c_L(x)$, ולכן ברור כי x גנרי אם ורק אם $\dim c_L(x) = \text{rank}(L)$. ■

משפט 1.1 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה מעל F . תהי $H \subset F$ תת אלגברת קרטן שמתפצלת מעל F . נסמן $R = R(L, H)$. נסמן את פירוק קרטן:

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} L^\alpha$$

1. לכל $\alpha, \beta \in R$, ניזכר באיבר h_α - הוא מקיים $[L^\alpha, L^{-\alpha}] = Fh_\alpha$ וכן $\alpha(h_\alpha) = 2$. אזי $a_{\beta, \alpha} = \beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$.

2. לכל $\alpha, \beta \in R$ הקבוצה $\{m \in \mathbb{Z} \mid \beta + m\alpha \in R \cup \{0\}\}$ היא רווח רצוף של מספרים שלמים, כלומר

$$[-r, q]_{\mathbb{Z}} = \{-r, -r+1, \dots, q-1, q\}$$

כאשר $r, q \geq 0$. מתקיים $a_{\beta, \alpha} = r - q$.

3. יהי $\alpha \in R$. אזי השורשים (איברי R) היחידים שפרופורציונים לאותו α הם $\pm\alpha$.

4. לכל $\alpha, \beta \in R$ מתקיים $\beta - a_{\beta, \alpha} \cdot \alpha \in R$.

5. יהיו $\alpha, \beta \in R$ ונניח כי $\beta - \alpha \notin R \cup \{0\}$. אזי $a_{\beta, \alpha} \leq 0$, $r = 0$, $a_{\beta, \alpha} = -q$.

6. יהיו $\alpha, \beta \in R$ נניח כי $\beta + \alpha \in R$. אזי $[L^\alpha, L^\beta] = L^{\alpha+\beta}$.

הוכחה:

1. נגדיר

$$J_{\beta,\alpha} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} L^{\beta+m\alpha}$$

אזי זהו מרחב אינווריאנטי להצגה $\sigma(x) = \text{ad}_L x$ של תת אלגברת לי $S_\alpha = L^\alpha \oplus$ $\varphi_\alpha : \mathfrak{sl}_2 F \rightarrow S_\alpha$ יש לנו גם האיזומורפיזם $Fh_\alpha \oplus L^{-\alpha} = Fx_\alpha \oplus Fh_\alpha \oplus Fx_{-\alpha}$ כך שנקבל כי $\sigma \circ \varphi_\alpha$ היא הצגה של $\mathfrak{sl}_2 F$. נכתוב את הפירוק:

$$\sigma \circ \varphi_\alpha \cong \rho_{r_1} \oplus \cdots \oplus \rho_{r_k}$$

כאשר $r_1 \leq \cdots \leq r_k$. פעולת $\sigma(h_\alpha)$ בתוך $J_{\beta,\alpha}$ היא אלכסונית על $L^{\beta+m\alpha}$. הפעולה היא על ידי כפל פי

$$(\beta + m\alpha)(h_\alpha) = \beta(h_\alpha) + 2m$$

הערכים העצמיים של $\varphi_{r_i}(h)$ הם מספרים שלמים: $r_i - 2, \dots, -r_i$. בפרט, $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ שלמים כולם, ולכן $\beta(h_\alpha) + 2m$.

2. כיוון שכל r_i הוא אחד הערכים העצמיים של $\sigma \circ \varphi_\alpha(h)$, יש שלם $m = n_i$ שעבורו $r_i = \beta(h_\alpha) + 2n_i$. בפרט, נקבל כי

$$r_i \equiv a_{\beta,\alpha} \pmod{2}$$

לכל i . מכאן, קבוצת הערכים העצמיים של $\alpha \circ \varphi(h)$ (לא כולל ריבוי) שווה לקבוצת הערכים העצמיים של $\rho_{r_k}(h)$, שהם מהצורה $r_k - 2l$, כאשר $0 \leq l \leq r_k$. לכן, לכל l כזה, יש $m_l \in \mathbb{Z}$ שעבורו

$$a_{\beta,\alpha} + 2m_l = r_k - 2l = \beta(h_\alpha) + 2n_k - 2l$$

לכן נקבל כי

$$m_l = n_k - l$$

כלומר נקבל כי

$$m = n_k, n_k - 1, \dots, n_k - r_k$$

כלומר נקבל כי

$$\{m \in \mathbb{Z} \mid \beta + m\alpha \in R \cup \{0\}\} = [n_k - r_k, n_k]_{\mathbb{Z}}$$

ברור כי $0 \in [n_k - r_k, n_k]_{\mathbb{Z}}$. אם כן, נסמן

$$-r := n_k - r_k \leq 0 \leq n_k =: q$$

כלומר נקבל

$$q + r = n_k + r = r_k = a_{\beta,\alpha} + 2n_k = a_{\beta,\alpha} + 2q$$

כלומר

$$q + r = a_{\beta,\alpha} + 2q$$

$$a_{\beta,\alpha} = r - q$$

3. יהי $\alpha \in R$. נניח כי $\beta \in R$ שעבורו $\beta = t\alpha$, כאשר $t \in F$. אזי

$$\mathbb{Z} \in \beta(h_\alpha) = \beta(h_\alpha) = t\alpha(h_\alpha) = 2t$$

לכן בצורה קלה גם $2t^{-1} \in \mathbb{Z}$, והרי

$$(2t)(2t^{-1}) = 4$$

נסיק כי

$$2t \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$$

כלומר

$$t \in \left\{ \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2 \right\}$$

מטרתנו כעת לפסול את המקרה הראשון והאחרון, כלומר להראות כי בהכרח $t = \pm 1$. כיוון שמתקיים $-R = R$, די לפסול את $2, \frac{1}{2}$. אם נראה כי $t \neq 2$, אזי $t^{-1} \neq 2$ גם מסימטריה, ואז זה יפסול את $t = \frac{1}{2}$. כלומר, נותר לנו למעשה להראות שלכל $\alpha \in R$, $2\alpha \notin R$. נניח בשלילה שקיים $\alpha \in R$ שעבורו $\beta = 2\alpha \in R$. נחזור שוב למרחב

$$J = \sum_{m=-r}^q L^{\beta+m\alpha} = \sum_{m=-r}^q L^{(m+2)\alpha}$$

לפי מה שראינו קודם, m שתורם לסכום $J_{\beta,\alpha}$ הוא כזה שמקיים

$$m+2 \in \left\{ 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2 \right\}$$

m שלם, ולכן נוכל לפסול את $\pm \frac{1}{2}$ ונקבל

$$J_{\beta,\alpha} = L^{-2\alpha} + L^{-\alpha} + H + L^\alpha + L^{2\alpha}$$

נתבונן שוב בהצגה $\sigma \circ \varphi_\alpha$ הערכים העצמיים השונים מאפס של $\sigma(h_\alpha) = \sigma \circ \varphi_\alpha(h)$ הם $\{\pm 2, \pm 4\}$, וכל אחד מהם מופיע בריבוי אחד. מכאן רואים כי

$$\sigma \circ \varphi_\alpha = l\rho_0 + \rho_4$$

כאשר $\dim H = l+1$. כזכור, למרחב ההצגה של ρ_4 , שנשמנו V_{ρ_4} , יש בסיס $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ של ווקטורים עצמיים של פעולת h , כמו שרשמנו בכיתה בעבר. בפרט ניזכר כי

$$\rho_4(h)v_0 = 4v_0$$

$$\rho_4(e)v_1 = 4v_0$$

$$\rho_4(h)v_1 = 2v_1$$

לכן $v_1 \in L^\alpha = Fx_\alpha$ ואז

$$\begin{aligned}\sigma(x_\alpha)v_1 &= \sigma \circ \varphi_\alpha(e)v_1 = 4v_0 \\ \sigma \circ \varphi_\alpha(h)v_1 &= 2v_1\end{aligned}$$

כלומר

$$\sigma(x_\alpha)v_1 = [x_\alpha, v_1] = 0$$

כלומר $4v_0 = 0$ בסתירה.

4. אם נתבונן במרווח השורשים שלנו (שנקרא גם שרשרת α של שורשים דרך β), אזי נשים לב כי

$$-r \leq q - r \leq q$$

ולכן כמובן $q - r \in [-r, q]_{\mathbb{Z}}$, כלומר $\beta + (q - r)\alpha \in R \cup \{0\}$. כל שנוותר להראות הוא שזה לא 0. אם הוא כן 0, נקבל כי β הוא כפולה של α , כלומר בהכרח $a_{\beta, \alpha} = \pm 1$, $\beta = \pm \alpha$ מכאן נקבל כי

$$a_{\beta, \alpha} = \beta(h_\alpha) = \pm \alpha(h_\alpha) = \pm 2$$

וזו כמובן סתירה.

5. נניח כי $\alpha \neq \beta$ וכן כי $\beta - \alpha \notin R$. נובע כי $-1 \notin [-r, q]$, אבל ראינו כי $0 \in [-r, q]$ ולכן בבירור $r = 0$. אם כן,

$$a_{\beta, \alpha} = r - q = -q \leq 0$$

6. נניח כי $\beta + \alpha \in R$. מכאן נובע כי $\beta \neq -\alpha$ שכן $0 \notin R$. כמו כן, נובע כי $\beta \neq \alpha$, כי $2\alpha \notin R$. לכן, אם נתבונן בסכום

$$J_{\beta, \alpha} = \sum_{m=-r}^q L^{\beta+m\alpha}$$

לא מופיע המחובר $L^0 = H$. כמו קודם, הערכים העצמיים של $\sigma \circ \varphi_\alpha(h)$ במרחב $J_{\beta, \alpha}$ הם $a_{\beta, \alpha} + 2m$, כל אחד בריבוי 1. נכתוב

$$\sigma \circ \varphi_\alpha = \rho_{r_1} \oplus \cdots \oplus \rho_{r_k}$$

כאשר $r_1 \leq \cdots \leq r_k$ ראינו כי $r_i \equiv a_{\beta, \alpha} \pmod{2}$, ואז כל הערכים העצמיים של $\rho_{r_1}(h)$ מופיע בסכום בריבוי k . נסיק כי $k = 1$ וכן כי $\sigma \circ \varphi_\alpha$ אי-פריקה. נשתמש שוב בבסיס $\{v_0, \dots, v_{r_1}\}$ של הווקטורים העצמיים של $\rho_{r_1}(h)$, כאשר

$$\rho_{r_1}(h)(v_i) = (r_1 - 2i)v_i$$

כזכור, לאופרטור $\rho_{r_1}(e)$ יש ערך עצמי, והוא 0, ולכן ווקטור עצמי יחיד (עד כדי כפל בסקלר) - v_0 . כמו כן, v_0 הוא ווקטור עצמי של $\rho_{r_1}(h)$ עם ערך עצמי r_1 , וזהו

הערך העצמי הגדול ביותר של $\rho_{r_1}(h)$. מהצד השני, הערך העצמי הגדול ביותר של $\sigma \circ \varphi_\alpha(h) = \sigma(h_\alpha)$ הוא $a_{\beta,\alpha} + 2q$, ולכן

$$a_{\beta,\alpha} + 2q = r_1$$

וכן $L^{\beta+q\alpha}$ הוא המרחב העצמי של $\sigma(h_\alpha)$ ביחס לערך העצמי r_1 , ולכן זהו המרחב העצמי היחיד לפעולת $\sigma \circ \varphi_\alpha(e) = \sigma(x_\alpha)$ עם ערך עצמי 0. מכאן נקבל כי

$$\sigma \circ \varphi_\alpha(e)(L^\beta) = \sigma(x_\alpha)(L^\beta) = [x_\alpha, L^\beta] \neq 0$$

כי אחרת גם L^β מרחב עצמי (ביחס לערך העצמי 0) של $\sigma \circ \varphi_\alpha(e)$ ואז $L^\beta = L^{\beta+q\alpha}$, ומכאן $\beta = \beta + q\alpha$, כלומר $q = 0$, אבל $q \geq 1$ כי $\beta + \alpha \in R$. זה מראה כי $[L^\alpha, L^\beta] \neq 0$. ההכלה $[L^\alpha, L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$ תמיד נכונה, והרי $\alpha + \beta \in R$ ולכן $\dim(L^{\alpha+\beta}) = 1$, כלומר $[L^\alpha, L^\beta] = L^{\alpha+\beta}$ כמו שרצינו.

■

ניזכר בסימון מהפעם הקודמת - עבור $\lambda \in H^*$, סימנו $\tilde{h}_\lambda \in H$ את האיבר היחיד שלכל $h \in H$ מקיים

$$\lambda(h) = \kappa(h, \tilde{h}_\lambda)$$

ראינו כי

$$h_\alpha = \frac{2\tilde{h}_\alpha}{\kappa(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\alpha)}$$

נסמן מחדש כך:

1. לכל $x, y \in L$ נסמן

$$(x, y) = \kappa(x, y)$$

2. לכל $\lambda, \mu \in H^*$ נגדיר

$$(\lambda, \mu) = (\tilde{h}_\lambda, \tilde{h}_\mu) = \kappa(\tilde{h}_\lambda, \tilde{h}_\mu) = \lambda(\tilde{h}_\mu) = \mu(\tilde{h}_\lambda)$$

זה כמובן מגדיר תבנית בילינארית סימטרית ולא מנוונת על H^* . לפי הסימון הזה, לכל שורש $\alpha \in R$, מתקיים

$$h_\alpha = \frac{2\tilde{h}_\alpha}{(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\alpha)}$$

נחשב אם כן:

$$(h_\alpha, h_\alpha) = \frac{4}{(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\alpha)^2} (\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\alpha) = \frac{4}{(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\alpha)}$$

ולבסוף

$$\frac{2h_\alpha}{(h_\alpha, h_\alpha)} = \frac{\frac{4\tilde{h}_\alpha}{(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\alpha)}}{\frac{4}{(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\alpha)}} = \tilde{h}_\alpha$$

טענה 1.2 יהיו $\alpha, \beta \in R$. אזי

$$a_{\beta, \alpha} = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2(h_\alpha, h_\beta)}{(h_\beta, h_\beta)} \in \mathbb{Z}$$

הוכחה:

$$a_{\beta, \alpha} = \beta(h_\alpha) = \kappa(h_\alpha, \tilde{h}_\beta) = (h_\alpha, \tilde{h}_\beta)$$

מכאן אפשר להציב בשתי צורות:

$$\begin{aligned} (h_\alpha, \tilde{h}_\beta) &= \frac{2(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\beta)}{(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\alpha)} = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \\ (h_\alpha, \tilde{h}_\beta) &= \frac{2(h_\alpha, h_\beta)}{(h_\beta, h_\beta)} \end{aligned}$$

■ בכל פעם הצבנו באחד הצדדים את הנוסחה שהראינו בשבילו.

הגדרה 1.3 אוסף השלמים $a_{\beta, \alpha}$, עבור $\beta, \alpha \in R$, נקראים **השלמים של קרטן** שמתאימים מערכת השורשים של L ביחס לתת האלגברה $H - R(L, H)$.

יהי $\alpha \in R$. נגדיר העתקה לינארית

$$\begin{aligned} s_\alpha : H^* &\rightarrow H^* \\ s_\alpha(\mu) &= \mu - \frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \end{aligned}$$

טענה 1.4 יהי $\alpha \in R$, אזי s_α שייכת לחבורה האורתוגונלית ביחס לתבנית $(\cdot, \cdot)$. יתר על כן, כשנפרק

$$H^* = F\alpha \oplus \alpha^\perp$$

אזי $s_\alpha|_{\alpha^\perp} = \text{Id}$, וכן $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ (כלומר זו העתקת שיקוף ביחס לאותו α).

הוכחה:

$$\begin{aligned}(s_\alpha(\mu), s_\alpha(\eta)) &= \left(\mu - \frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \eta - \frac{2(\eta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \right) = \\ &= (\mu, \eta) - \frac{2(\eta, \alpha)(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} - \frac{2(\mu, \alpha)(\eta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} + \frac{4(\mu, \alpha)(\eta, \alpha)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)^2} = \\ &= (\mu, \eta)\end{aligned}$$

כלומר ההעתקה שלנו אכן אורתוגונלית. כעת, אם $(\mu, \alpha) = 0$ אזי $s_\alpha(\mu) = \mu$ לפי הגדרה, וכן

$$s_\alpha(\alpha) = \alpha - \frac{2(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = \alpha - 2\alpha = -\alpha$$

■

הגדרה 1.5 לכל $\alpha \in R$ מתקיים

$$s_\alpha(R) = R$$

הוכחה: יהי $\beta \in R$. אזי

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = \beta - a_{\beta, \alpha}\alpha \in R$$

מהמשפט הקודם. השיקוף שלנו כמובן חד-חד-ערכי ועל מסדר 2, ולכן זה מספיק, כי R סופית. ■

הגדרה 1.6 תהי $W = W(L, H)$ חבורת האוטומורפיזמים של H^* הנוצרת על ידי כל השיקופים $\{s_\alpha \mid \alpha \in R\}$. חבורה זו תיקרא **חבורת וייל (Weyl)** של L ביחס לתת האלגברה H .

חבורת וייל היא סופית, כי ההעתקה

$$W \ni w \mapsto w|_R$$

היא חד-חד-ערכית, כי R פורשת את H^* . לכן יש שיון של W בחבורת התמורות של הקבוצה הסופית R (S_R) - כלומר W סופית. נשים לב כמובן שלכל $w \in W$ מתקיים $w(R) = R$ כי לכל $\alpha \in R$ מתקיים $s_\alpha(R) = R$, ולכן אנחנו יודעים כי $w|_R \in S_R$. נבחר כעת $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset R$ בסיס של H^* מעל F (כמובן $n = \dim_F H^* = \text{rank}(L)$).

טענה 1.7 לכל $\alpha \in R$ מתקיים

$$\alpha \in \text{Span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

הוכחה: נכתוב

$$\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$$

כאשר $c_i \in F$ לכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים

$$\frac{2(\alpha, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^n c_i \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$$

וכך נקבל מערת משוואות בנעלמית $c_1, \dots, c_n$ כשכל המקדמים שלמים (הם כולם שלמים של קרטן). למערכת הזאת יש פתרון יחיד, כי המטריצה $((\alpha_i, \alpha_j))_{i,j \leq n}$ הפיכה (וזאת המטריצה של המערכת, עד כדי כפל במטריצה אלכסונית). על כן נקבל שהפתרון היחיד הוא עם קואורדינטות רציונליות (מכלל קרמר, כי כל המקדמים שלמים). ■

נגדיר

$$E_{\mathbb{Q}} = \text{Span}_{\mathbb{Q}} \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

טענה 1.8 צמצום התבנית $(\cdot, \cdot)$ למרחב $E_{\mathbb{Q}}$ מקבל ערכים רציונליים. התבנית על $E_{\mathbb{Q}}$ אינה מנוונת, ויתר על כן היא חיובית לחלוטין - כלומר $(\lambda, \lambda) > 0$ לכל $\lambda \neq 0$.

הוכחה: די להראות כי $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathbb{Q}$ מתקיים

$$\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \in \mathbb{Z}$$

כלומר

$$(\alpha_i, \alpha_j) \in \frac{(\alpha_j, \alpha_j)}{2} \mathbb{Z}$$

כלומר מספיק להראות כי $(\alpha_j, \alpha_j) \in \mathbb{Q}$. נראה כעת כי $(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Q}$ לכל $\alpha \in R$. מתקיים

$$\begin{aligned} (\alpha, \alpha) &= \kappa(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\alpha) = \sum_{\beta \in R} \beta(\tilde{h}_\alpha) \beta(\tilde{h}_\alpha) = \\ &= \sum_{\beta \in R} \left(\beta(\tilde{h}_\alpha) \right)^2 = \sum_{\beta \in R} \left(\kappa(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\beta) \right)^2 = \\ &= \sum_{\beta \in R} (\alpha, \beta)^2 \end{aligned}$$

אם כן,

$$\frac{4}{(\alpha, \alpha)} = (\alpha, \alpha) \frac{4}{(\alpha, \alpha)^2} = \sum_{\beta \in R} \frac{4(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)^2} = \sum_{\beta \in R} \left(\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \right)^2$$

כאן יש לנו סכום של ריבועים של מספרים שלמים, כלומר הסכום כולו שלם - אם כן

$$\frac{4}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}^+$$

ולכן נקבל כי $(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Q}$. יהי $\lambda \in E_{\mathbb{Q}}$. נעשה את אותו פיתוח בדיוק ונקבל

$$(\lambda, \lambda) = \sum_{\beta \in R} (\lambda, \beta)^2$$

זה סכום של רציונאליים חיוביים, ולכן חיובי בעצמו. זה יתאפס אם ורק אם $(\lambda, \beta) = 0$ לכל $\beta \in R$ - והרי R פורש את H^* , ולכן $\lambda = 0$. ■

לבסוף, נגדיר

$$E = E_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

הרחבת סקלרים, ונרחיב את התבנית $(\cdot, \cdot)$ למרחב E כרגיל. נקבל מכפלה פנימית על E . נמשיך לסמן את $1 \otimes \alpha$ בתור α לכל $\alpha \in R$, וכן נסמן את המכפלה הפנימית באותו סימון $(\cdot, \cdot)$.

$$\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}} = \dim H = \text{Rank}(L)$$

נסכם במשפט הבא:

משפט 1.9 1. R היא תת קבוצה סופית של המרחב האוקלידי E ; R פורשת את E וכן $0 \notin R$.

2. לכל $\alpha \in R$ גם $-\alpha \in R$, והכפולות היחידות של α שנמצאות בתוך R הן $\pm\alpha$.

3. לכל $\alpha \in R$, מתקיים

$$s_{\alpha}(R) = R$$

כאשר s_{α} מוגדר כמו קודם:

$$s_{\alpha} : E \rightarrow E$$

$$s_{\alpha}(v) = v - \frac{2(\alpha, v)}{\|\alpha\|^2} \alpha$$

4. לכל $\alpha, \beta \in R$ מתקיים

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{\|\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}$$

הגדרה 1.10 נתון מרחב מכפלה פנימית E מעל $\mathbb{R}$. קבוצה סופית $R \subset E$ תיקרא **מערכת שורשים (Root System)** אם היא מקיימת את ארבעת התנאים מהמשפט.

דוגמה ניקח $L = \mathfrak{sl}_n F$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$$

ראינו כי

$$R = \{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

כאשר

$$\alpha_{i,j}(h) = h_i - h_j$$

ראינו גם כי

$$h_{\alpha_{i,j}} = e_{i,i} - e_{j,j}$$

נרצה לחשב את $\tilde{h}_\alpha$ מתקיים

$$h_i - h_j = \alpha_{i,j}(h) = \kappa(h, \tilde{h}_\alpha) = 2n \text{tr}(h \cdot \tilde{h}_{\alpha_{i,j}})$$

אם כן נקבל כי

$$\tilde{h}_{\alpha_{i,j}} = \frac{1}{2n}(e_{i,i} - e_{j,j}) = \frac{1}{2n}h_{\alpha_{i,j}}$$

עבור $r \neq s, i \neq j$ נקבל

$$\begin{aligned} (\alpha_{r,s}, \alpha_{i,j}) &= \kappa(\tilde{h}_{\alpha_{r,s}}, \tilde{h}_{\alpha_{i,j}}) = \frac{1}{4n^2} 2n \text{tr}((e_{r,r} - e_{s,s})(e_{i,i} - e_{j,j})) = \\ &= \frac{1}{2n} \text{tr}(\delta_{i,r} e_{i,i} - \delta_{r,j} e_{j,j} - \delta_{s,i} e_{i,i} + \delta_{s,j} e_{j,j}) = \\ &= \frac{1}{2n} (\delta_{i,r} - \delta_{r,j} - \delta_{s,i} + \delta_{s,j}) = \\ &= \frac{1}{2n} \begin{cases} 0 & r, s \neq i, j \\ 1 & r = i, s \neq j \\ 2 & r = i, s = j \\ -1 & r = j, s \neq i \\ -2 & r = j, s = i \end{cases} \end{aligned}$$

נתבונן בשיקוף

$$\begin{aligned} s_{\alpha_{i,j}}(\alpha_{r,s}) &= \alpha_{r,s} - \frac{2(\alpha_{r,s}, \alpha_{i,j})}{\|\alpha_{i,j}\|^2} \alpha_{i,j} = \\ &= \alpha_{r,s} - 2n(\alpha_{r,s}, \alpha_{i,j}) \alpha_{i,j} = \\ &= \begin{cases} \alpha_{r,s} & r, s \neq i, j \\ \alpha_{i,s} - \alpha_{i,j} = \alpha_{j,s} & r = i, s \neq j \\ -\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i} & r = i, s = j \\ \alpha_{j,s} + \alpha_{i,j} = \alpha_{i,s} & r = j, s \neq i \\ \alpha_{j,i} + 2\alpha_{i,j} = \alpha_{i,j} & r = j, s = i \end{cases} \end{aligned}$$

לפי חישוב זה רואים כי $s_{\alpha_{i,j}}$ פועל כמו תמורת החילוף (i, j) על $\{1, 2, \dots, n\}$. נקבל אם כן כי

$$W_{\text{sl}_n F} \cong S_n$$

הגדרה 1.11 חבורת ווייל של מערכת השורשים R היא החבורה הנוצרת על ידי כל השיקופים s_α . זאת חבורה סופית.

דוגמה ניתן דוגמה מהכיוון של מערכות שורשים. יהי

$$E = \left\{ \sum_{i=1}^{l+1} x_i e_i \in \mathbb{R}^{l+1} \mid \sum_{i=1}^{l+1} x_i = 0 \right\}$$

נגדיר

$$R = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$$

זאת מערכת שורשים. נתבונן במנה:

$$\frac{2(e_i - e_j, e_r - e_s)}{\|e_i - e_j\|^2} = (e_i - e_j, e_r - e_s) \in \mathbb{Z}$$

זה חישוב פשוט. לבסוף, נתבונן בשיקוף:

$$s_{e_i - e_j}(e_r - e_s)$$

קל לבדוק בידיים ולראות שמקבלים איזשהו $e_{r'} - e_{s'} \in R$.

למעשה הדוגמה הזו היא בדיוק הדוגמה הקודמת, פשוט מהכיוון של מרחב אוקלידי.