

אלגבראות לי

© ארזים

3 ביוני 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 מערכת השורשים באלגברת לי פשוטה למחצה ביחס לתת אלגברת קרטן מתפצלת מעל השדה

היינו באמצע הוכחת משפט:

משפט 1.1 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה, ותהי H תת אלגברת קרטן מתפצלת מעל F . נסמן $R = R(L, H)$ נפרק

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} L^\alpha \right)$$

פירוק זה נקרא פירוק קרטן של L ביחס לתת האלגברה H . כל הבאים מתקיימים:

1. לכל $\alpha \in R(L, H)$ מתקיים $\dim L^\alpha = 1$.

2. (א) H תת אלגברה קומוטטיבית.

(ב) לכל $h \in H$ ולכל $x \in L_H^\alpha$ מתקיים $\text{ad}_L h(x) = [h, x] = \alpha(h) \cdot x$.

(ג) לכל $\alpha, \beta \in R \cup \{0\}$ מתקיים $[L^\alpha, L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$.

(ד) לכל $\alpha \in R$ גם $-\alpha \in R$.

(ה) לכל $\alpha \in R$ נקבל $[L^\alpha, L^{-\alpha}] = H_\alpha$ ממימד 1 ונוצר על ידי איבר h_α עבורו $\alpha(h_\alpha) = 2$.

3. (א) לכל $\alpha, \beta \in R \cup \{0\}$ כך שמתקיים $\alpha + \beta \neq 0$ מתקיים $\kappa_L(L^\alpha, L^\beta) = 0$.

(ב) לכל $\alpha \in R \cup \{0\}$, התבנית $\kappa_L|_{L^\alpha \times L^{-\alpha}}$ לא מנוונת. בפרט, התבנית $\kappa_L|_{H \times H}$ לא מנוונת.

(ג) לכל $x, y \in H$ מתקיים

$$\kappa_L(x, y) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(x) \alpha(y)$$

4. (א) מתקיים $H^* = \text{Span} R$.

(ב) מתקיים $H = \text{Span} \{h_\alpha \mid \alpha \in R\}$.

5. לכל $\alpha \in R$ תת המרחב

$$S_\alpha = H_\alpha \oplus L^\alpha \oplus L^{-\alpha}$$

הוא תת אלגברת לי ממימד 3. נבחר $x_\alpha \in L^\alpha$. אז יש איבר $x_{-\alpha} \in L^{-\alpha}$ יחיד כך שמתקיים $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$. נתבונן בהעתקה הלינארית

$$\varphi : \mathfrak{sl}_2 F \rightarrow S_\alpha$$

$$\varphi(e) = x_\alpha$$

$$\varphi(h) = h_\alpha$$

$$\varphi(f) = x_{-\alpha}$$

ונקבל איזומורפיזם של אלגבראות לי.

הוכחה: נמשיך מאיפה שעצרנו - ראינו כבר את ג2, ד2, א3, ב3, ואת סעיף 4. נחזור על החלק האחרון מהפעם הקודמת:

יהי $h \in H$. נכתוב את פירוק ז'ורדן-שבליי שלו: $h = h_s + h_n$. אזי גם

$$\text{ad}_L h = \text{ad}_L h_s + \text{ad}_L h_n$$

פירוק ז'ורדן-שבליי. כזכור, L^α חלקי למרחב העצמי המוכלל של $\text{ad}_L h$ ביחס לערך העצמי $\alpha(h)$. לכן, L^α חלקי למרחב העצמי של $\text{ad}_L h_s$ ביחס לערך העצמי $\alpha(h)$: לכל $x \in L^\alpha$ מתקיים

$$\text{ad}_{h_s}(x) = [h_s, x] = \alpha(h)x$$

בפרט (עבור $\alpha = 0$) נקבל כי $[h_s, x] = 0$ לכל $x \in H$, ובפרט $h_s \in N_L(H)$. שהרי H תת אלגברת קרטן. נסיק כי $h_s, h_n \in H$. הערכים העצמיים של ad_{h_n} כולם אפס (כי הוא נילפוטנטי). מתקיים $h_n \in H$, ולכן הערכים העצמיים של $\text{ad}_L h_n$ הם $\{\alpha(h_n) \mid \alpha \in R\} \cup \{0\}$, ולכן $\alpha(h_n) = 0$ לכל $\alpha \in R$. מסעיף 4, נקבל כי בהכרח $h_n = 0$, כלומר $h = h_s$ פועל בצורה אלכסונית על L :

$$\text{ad}_L h|_H = 0$$

$$\text{ad}_L h|_{L^\alpha} = \alpha(h) \cdot \text{id}_{L^\alpha}$$

קיבלנו ליכסון סימולטני של כל האופרטורים $\{\text{ad}_L h\}_{h \in H}$. מכאן נקבל כי $\text{ad}_L[H, H] = 0$. ההעתקה ad_L חד-חד-ערכית, ולכן נקבל כי $[H, H] = 0$. כמוכך שראינו כי לכל $x \in L^\alpha, h \in H$ מתקיים $[h, x] = \alpha(h)x$. זה נותן לנו את סעיפים 2א, 2ב. ראינו כי $\kappa|_{L^\alpha \times L^{-\alpha}}$ לא מנוונת. נראה כי $\kappa|_{L^\alpha \times L^{-\alpha}} = F\tilde{h}_\alpha$, כאשר נסמן באופן כללי, לכל $\lambda \in H^*$ את האיבר היחיד $\tilde{h}_\lambda$ עבורו

$$\lambda(h) = \kappa(h, \tilde{h}_\lambda)$$

וזה קיים שהרי התבנית $\kappa|_{H \times H}$ לא מנוונת. בהינתן $x \in L^\alpha, y \in L^{-\alpha}$ נחשב:

$$\begin{aligned} \kappa([x, y], h) &= \kappa(x, [y, h]) \stackrel{[h, y] = -\alpha(h)y}{=} \alpha(h) \kappa(x, y) = \kappa(h, \tilde{h}_\alpha) \kappa(x, y) = \\ &= \kappa(\kappa(x, y) \tilde{h}_\alpha, h) \end{aligned}$$

זה נכון לכל $h \in H$, והרי $\kappa|_{H \times H}$ לא מנוונת, $[x, y] \in H$, נקבל כי בהכרח

$$[x, y] = \kappa(x, y) \tilde{h}_\alpha \in F\tilde{h}_\alpha$$

בגלל שראינו שהתבנית $\kappa|_{L^\alpha \times L^{-\alpha}}$ לא מנוונת נקבל כי

$$\kappa(L^\alpha, L^{-\alpha}) = F$$

ולכן נקבל כי

$$[L^\alpha, L^{-\alpha}] = F\tilde{h}_\alpha$$

נראה כעת כי

$$\alpha(\tilde{h}_\alpha) \neq 0$$

נניח בשלילה שזה כן אפס. ניקח $x_0 \in L^\alpha, y_0 \in L^{-\alpha}$ המקיימים $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = 1$. נגדיר

$$L' = F\tilde{h}_\alpha \oplus Fx_0 \oplus Fy_0$$

מתקיים $[x_0, y_0] = \tilde{h}_\alpha$ ומכאן ומחישובים קלים נובע כי L' אלגברת לי נילפוטנטית. נרחיב סקלרים אל $\bar{F}$. $L'_F \subset L_{\bar{F}}$. נתבונן בהצגה

$$\pi_{\bar{F}}(\zeta) = \text{ad}_{L_{\bar{F}}}(\zeta)$$

של L'_F שהיא הרחבת סקלרים של ההצגה $\pi(z) = \text{ad}_L z$ של L' בתוך $L_{\bar{F}}$. נילפוטנטיות ולכן נקבל שילוש סימולטני של ההצגה - ובפרט נקבל שהערכים העצמיים של כל הקומוטטורים הם 0. לכן בפרט הערכים העצמיים של $\tilde{h}_\alpha$ הם 0, והערכים העצמיים שלו הם $\{\beta(\tilde{h}_\alpha) \mid \beta \in R\} \cup \{0\}$.

כלומר $\beta(\tilde{h}_\alpha) = 0$ לכל $\beta \in R$ - ולכן מסעיף 4 נקבל כי $\tilde{h}_\alpha = 0$ בסתירה.

כעת נוכל לנרמל ולקבל $h_\alpha = c\tilde{h}_\alpha$ שמקיים $\alpha(h_\alpha) = 2$, וזה סעיף 2. כעת נראה כי $H = \text{Span}\{h_\alpha \mid \alpha \in R\}$, כלומר סעיף 4. בשלילה, נניח אגף ימין מוכל ממש בשמאל. אזי יש $\lambda \in H^*$ $\lambda \neq 0$ המקיים

$$\lambda(h_\alpha) = 0$$

לכל $\alpha \in R$. לכן

$$2 = \alpha(h_\alpha) = c\alpha(\tilde{h}_\alpha) = c\kappa(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\alpha)$$

ולכן נקבל כי

$$h_\alpha = \frac{2\tilde{h}_\alpha}{\kappa(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\alpha)}$$

וכעת

$$0 = \lambda(h_\alpha) = \frac{2}{\kappa(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\alpha)} \lambda(\tilde{h}_\alpha)$$

ולכן

$$0 = \lambda(\tilde{h}_\alpha) = \kappa(\tilde{h}_\alpha, \tilde{h}_\lambda) = \alpha(\tilde{h}_\lambda)$$

ולכן $\alpha(\tilde{h}_\lambda) = 0$, לכל $\alpha \in R$. מסעיף 4 נקבל כי $\tilde{h}_\lambda = 0$, כלומר $\lambda = 0$, בסתירה.
 כעת, יהי $\alpha \in R$. נקבע $x_\alpha \in L^\alpha \neq 0$. יש $x_{-\alpha} \in L^{-\alpha}$ יחיד עבורו $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$.
 נגדיר כעת

$$S_\alpha = Fx_\alpha \oplus Fh_\alpha \oplus Fx_{-\alpha}$$

זאת תת אלגברת לי, כי

$$\begin{aligned} [h_\alpha, x_\alpha] &= \alpha(h_\alpha)x_\alpha = 2x_\alpha \\ [h_\alpha, x_{-\alpha}] &= -\alpha(h_\alpha)x_{-\alpha} = -2x_{-\alpha} \\ [x_\alpha, x_{-\alpha}] &= h_\alpha \end{aligned}$$

נגדיר

$$\varphi : \mathfrak{sl}_2 F \rightarrow S_\alpha$$

לפי

$$\begin{aligned} \varphi(e) &= x_\alpha \\ \varphi(h) &= h_\alpha \\ \varphi(f) &= x_{-\alpha} \end{aligned}$$

זהו איזומורפיזם של מרחבים ווקטוריים שהוא גם איזומורפיזם של אלגבראות לי, וזה מוכיח את סעיף 5. נותר לנו רק את סעיף 1. נניח בשלילה שיש $\alpha \in R$ עבורו $\dim L^\alpha > 1$. לכן גם

$$\dim L^{-\alpha} = \dim L^\alpha > 1$$

יהי $y \in L^{-\alpha} \neq 0$. התבנית $\kappa|_{L^\alpha \times L^{-\alpha}}$ לא מנוונת, ולכן יש $x_\alpha \in L^\alpha \neq 0$ שמקיים $\kappa(x_\alpha, y) = 0$. כמו קודם, יש $x_{-\alpha} \in L^{-\alpha}$ יחיד עבורו $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$, ונתבונן במרחב S_α שהגדרנו קודם. ניקח את האיזומורפיזם שהגדרנו קודם $\varphi : \mathfrak{sl}_2 F \xrightarrow{\sim} S_\alpha$. נתבונן בהצגה של $\mathfrak{sl}_2 F$ המוגדרת על ידי

$$\rho(x) = \text{ad}_L \varphi(x)$$

אזי

$$\rho(e)(y) = [\varphi(e), y] = [x_\alpha, y] = \kappa(x_\alpha, y)\tilde{h}_\alpha = 0$$

כעת יש פירוק

$$\rho \cong \bigoplus_{i=1}^k \rho_{r_i}$$

כאשר $0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_k$, וההצגה ρ_{r_i} היא ההצגה היחידה של $\mathfrak{sl}_2 F$ מממד $r_i + 1$, כפי שראינו כשדיברנו על ההצגות של $\mathfrak{sl}_2 F$. למרחב ההצגה V_{ρ_r} יש בסיס של ווקטורים עצמיים של $\rho_r(h)$ שנשמנו

$$v_0, \dots, v_r$$

כאשר

$$\rho_r(h) v_j = (r - 2j) v_j$$

כמו כן ניזכר כי

$$\rho_r(e) v_j = j(r - j + 1) v_{j-1}$$

$$\rho_r(e) v_0 = 0$$

ראינו כי y הוא ווקטור עצמי של $\rho(e)$ ביחס לערך העצמי 0. נסמן את הבסיס שדיברנו עליו עכשיו שמתאים להצגה ρ_{r_i} בתור $\{y_{i,0}, \dots, y_{i,r_i}\}$ ואז

$$\rho(h) y_{i,j} = (r_i - 2j) y_{i,j}$$

$$\rho(e) y_{i,j} = j(r_i - j + 1) y_{i,j-1}$$

$$\rho(e) y_{i,0} = 0$$

נסיק כי

$$y = \sum_{i=1}^k a_i y_{i,0}$$

כעת מתקיים

$$\rho(h)(y) = [\varphi(h), y] = [h\alpha, y] = -2y$$

כמו כן, מתקיים

$$\rho(h)(y) = \sum_{i=1}^k a_i \rho(h) y_{i,0} = \sum_{i=1}^k a_i r_i y_{i,0}$$

בסך הכל נקבל כי

$$\sum_{i=1}^k (-2a_i) y_{i,0} = \sum_{i=1}^k a_i r_i y_{i,0}$$

ולכן נקבל כי

$$a_i r_i = -2a_i$$

לכל i . כיוון שידוע לנו כי $r_i \geq 0$ נקבל $a_i = 0$ לכל i , ואז $y = 0$ בסתירה. לכן הוכחנו גם את סעיף 1. נציב זאת בנוסחה שראינו כבר בעבר כדי לקבל את 3 ונסיים את המשפט. ■

מסקנה 1.2 בהנחות המשפט, L נוצרת על ידי מרחבי השורש L^α עבור $\alpha \in R$.

הוכחה: ראינו כי

$$H = \sum_{\alpha \in R} Fh_\alpha = \sum_{\alpha \in R} [L^\alpha, L^{-\alpha}]$$

ולכן

$$L = \sum_{\alpha \in R} (L^\alpha \oplus [L^\alpha, L^{-\alpha}] \oplus L^\alpha)$$

■

דוגמה ניקח $L = \mathfrak{sl}_n F$,

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^n h_i = 0 \right\}$$

זו תת אלגברת קרטן של מטריצות אלכסוניות מעקבה 0. נכתוב

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} F e_{i,j} \right) = H \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} L^{\alpha_{i,j}} \right)$$

עבור $h \in H$ נקבל

$$\text{adh}(e_{i,j}) = [h, e_{i,j}] = h e_{i,j} - e_{i,j} h = h_i e_{ij} - h_j e_{ij} (h_i - h_j) (e_{i,j})$$

נסמן

$$\alpha_{i,j}(h) = h_i - h_j$$

ואז נקבל כי

$$L^{\alpha_{i,j}} = F e_{i,j}$$

כאשר $i \neq j$, כלומר

$$R = R(L, H) = \{\alpha_{i,j} \mid i \neq j\}$$

כעת,

$$[L^{\alpha_{i,j}}, L^{\alpha_{r,s}}] = F[e_{i,j}, e_{r,s}]$$

כעת

$$[e_{i,j}, e_{r,s}] = e_{i,j} e_{r,s} - e_{r,s} e_{i,j} = \delta_{jr} e_{i,s} - \delta_{si} e_{r,j}$$

נקבל

$$[e_{i,j}, e_{r,s}] = \begin{cases} 0 & i \neq s, j \neq r \\ e_{i,s} & j = r, i \neq s \\ e_{i,i} - e_{j,j} & j = r, i = s \end{cases}$$

כלומר,

$$[L^{\alpha_{i,j}}, L^{\alpha_{r,s}}] = \begin{cases} 0 & i \neq s, j \neq r \\ L^{\alpha_{i,s}} & r = j, s \neq i \\ F(e_{i,i} - e_{j,j}) & r = j, s = i \end{cases}$$

נקבל כי

$$\alpha_{i,j}(e_{i,i} - e_{j,j}) = 1 - (-1) = 2$$

כלומר

$$h_{\alpha_{i,j}} = e_{i,i} - e_{j,j}$$

לבסוף, ראינו את תבנית קילינג:

$$\kappa(x, y) = 2n \operatorname{tr}(xy)$$

כלומר, אם $h, h' \in H$ נקבל

$$\kappa(h, h') = 2n \operatorname{tr}(hh') = 2n \sum_{i=1}^n h_i h'_i$$

במשפט ראינו כי

$$\begin{aligned} \kappa(h, h') &= \sum_{\alpha \in R} \alpha(h) \alpha(h') = \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j}(h) \alpha_{i,j}(h') = \\ &= \sum_{i,j=1}^n (h_i - h_j)(h'_i - h'_j) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n h_i h'_i - \sum_{i,j=1}^n h_i h'_j - \sum_{i,j=1}^n h_j h'_i + \sum_{i,j=1}^n h_j h'_j = \\ &= 2n \sum_{i=1}^n h_i h'_i - 2 \left(\sum_{i=1}^n h_i \right) \left(\sum_{j=1}^n h'_j \right) \end{aligned}$$

המחוסר הימני הוא 0 כי כל סכום הוא 0 - אלה העקבות של איברים מתוך $\mathfrak{sl}_n F$, כלומר 0. כעת,

$$S_{\alpha_{i,j}} = Fx_{\alpha_{i,j}} + Fh_{\alpha_{i,j}} + Fx_{-\alpha_{i,j}} = Fe_{i,j} + F(e_{i,i} - e_{j,j}) + Fe_{j,i}$$

זהו אוסף המטריצות שבמקום i, i יש להן מספר a , במקום j, j יש $-a$, ובמקומות j, i, i, j יש מספרים כלשהם. בכל שאר המקומות יש 0.

משפט 1.3 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה.

1. יהי $x \in L$ איבר גנרי. אזי x פשוט למחצה. תת אלגברת קרטן היחידה שמכילה את x היא מרכז של x בתוך L , שאנחנו מסמנים $c_L(x)$.
2. תהי $H \subset L$ תת אלגברת קרטן. אזי H תת אלגברה קומוטטיבית מקסימלית. כל איברי H פשוטים למחצה. H רדוקטיבית בתוך L .
3. תהי $\mathcal{E}$ קבוצת כל תת אלגבראות לי הקומוטטיביות שאיבריהן פשוטים למחצה. אזי האיברים המקסימליים בקבוצה $\mathcal{E}$ ביחס להכלה הם בדיוק כל תתי אלגבראות קרטן של L .
4. יהי $x \in L$ איבר פשוט למחצה. אזי x מוכל בתת אלגברת קרטן. x איבר גנרי אם ורק אם $\dim c_L(x) = \text{rank}(L)$.

הוכחה:

1. כזכור, x גנרי ולכן תת אלגברת קרטן היחידה שמכילה אותו היא $L^0(x)$. נניח קודם כי F סגור אלגברית, ואז $H = L^0(x)$ מתפצלת. לכן, מהמשפט הקודם, H קומוטטיבית וכל איבריה פשוטים למחצה (פועלים באופן אלכסוני לפי פירוק קרטן $L = H \oplus (\bigoplus L^\alpha)$). $x \in H$ ולכן גם x פשוט למחצה, ולכן

$$L^0(x) = \{z \in L \mid [x, z] = 0\} = c_L(x)$$

זאת משום שהמרחב העצמי המוכלל שווה למרחב העצמי (בגלל האלכסוניות). במקרה הכללי, ראינו כי $L_{\overline{F}}$ פשוטה למחצה, $x \otimes 1$ גנרי ולכן $1 \otimes x$ פשוט למחצה (כלומר ניתן ללכסון) ולפי הגדרה x פשוט למחצה. ראינו גם כי

$$\begin{aligned} L_{\overline{F}}^0(x \otimes 1) &= L^0(x) \otimes_F \overline{F} \\ L_{\overline{F}}^0(x \otimes 1) &= c_{L_{\overline{F}}}(x \otimes 1) \end{aligned}$$

ולכן נובע גם כי

$$L^0(x) = c_L(x)$$

הכלה אחת תמיד נכונה ($\supset$), והשנייה נובעת מהשוויון האחרון שכתבנו - יהי $y \in L^0(x)$, אזי $L^0(x) = c_{L_{\overline{F}}}(x \otimes 1) = L_{\overline{F}}^0(x \otimes 1)$ כלומר

$$0 = [y \otimes 1, x \otimes 1] = [y, x] \otimes 1$$

כלומר $[y, x] = 0$, כלומר $y \in c_L(x)$.

2. אנחנו יודעים כי $H_{\overline{F}} \subset L_{\overline{F}}$ תת אלגברת קרטן, שמתפצלת מעל $\overline{F}$, ולכן היא קומוטטיבית - ומכאן H קומוטטיבית. כמו כן, ראינו כי איברי $H_{\overline{F}}$ פשוטים למחצה ולכן גם איברי H . אי $H \subset H'$ תת אלגברת לי קומוטטיבית אזי בפרט H' נילפוטנטית, והרי H תת אלגברת לי נילפוטנטית מקסימלית, ולכן $H' = H$. כזכור, מעל שדה סגור אלגברית, הראינו כבר כי H רדוקטיבית בתוך L (שכן כל איבריה ניתנים לשילוש סימולטני) - ולכן אם נרחיב סקלרים נקבל כי $H_{\overline{F}}$ רדוקטיבית בתוך $L_{\overline{F}}$, כלומר ההצגה $\text{ad}_{L_{\overline{F}}} H_{\overline{F}}$ פריקה לחלוטין. הצגה זו היא הרחבת סקלרים של ההצגה $\text{ad}_L|_H$ - ולכן גם ההצגה הזו היא פריקה לחלוטין. לפי תרגיל 4 בדף 3, $\text{ad}_L|_H$ פריקה לחלוטין כלומר H רדוקטיבית בתוך L .

3. תהי $H \subset L$ תת אלגברת לי קומוטטיבית שכל איבריה פשוטים למחצה. לכן האלגברה $\text{ad}_{L_{\overline{F}}} H_{\overline{F}}$ היא קבוצה קומוטטיבית של אופרטורים ניתנים ללכסון על $L_{\overline{F}}$, ולכן ניתנת ללכסון סימולטני. בפרט $H_{\overline{F}}$ רדוקטיבית בתוך $L_{\overline{F}}$. כמו קודם נסיק כי H רדוקטיבית בתוך L . נסמן $N = N_L(H)$, אזי $N \subset L$, $[H, N] \subset H \subset N$. לכן $N \subset L$ תת מרחב אינווריאנטי להצגה של H שהיא $\text{ad}_L|_H$. זאת הצגה פריקה לחלוטין כפי שהסברנו לפני רגע, ולכן יש פירוק $N = H \oplus N'$ כאשר $[H, N'] \subset N'$. מכאן,

$$[H, N'] \subset N' \cap H = 0$$

לכן

$$[H, N] = [H, H] + [H, N'] = 0$$

כלומר

$$N \subset c_L(H)$$

ההכלה בכיוון ההפוך תמיד נכונה. כלומר, קיבלנו כי $N_L(H) = c_L(H)$. נסמן $C = N_L(H) = c_L(H)$. נראה כי C רדוקטיבית בתוך L . כיוון שראינו כבר כי H רדוקטיבית בתוך L נקבל כי

$$L = C \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^k V_i \right)$$

כאשר V_i מודולים אי פריקים מעל H (ביחס להצגה $\text{ad}_L|_H$). נראה כעת כי

$$\bigoplus_{i=1}^k V_i = [L, H]$$

יהי $1 \leq i \leq k$ כלשהו, ויהי $v \in V_i$ כלשהו. אזי

$$S_v = \sum_{l \geq 1} \text{Span} \{ \text{ad}_{h_1} \circ \dots \circ \text{ad}_{h_l}(v) \mid h_1, \dots, h_l \in H \} \subset V_i$$

נשים לב כי $S_v \neq 0$, לכל $v \neq 0$. המרחב S_v אינווריאנטי לפעולת $\text{ad}_L|_H$ והמרחב V_i אי פריק, ולכן נקבל כי $S = V_i$. ברור כי

$$V_i \subset [L, H] = \sum_{w \in L} [H, w]$$

נסיק כי בהכרח

$$L = C + [L, H]$$

נסמן

$$L' = \bigoplus_{i=1}^k V_i$$

אזי

$$[L, H] = [C, H] + [L', H] = [L', H] \subset \sum [H, V_i] \subset \sum V_i = L'$$

נסיק כי

$$C \cap [L, H] = 0$$

ובעצם

$$[L, H] = L'$$

כלומר קיבלנו פירוק

$$L = C \oplus [L, H]$$

לכל $c \in C, x \in L, h \in H$ נקבל

$$\kappa(c, [x, h]) = \kappa([c, h], x) = \kappa(0, x) = 0$$

אם כן המחוברים ניצבים ביחס לתבנית קילינג, ולכן היא חייבת להיות לא מנוונת על כל מחובר, ובפרט על C . כעת יהי $x \in C$, ונכתוב את פירוק ז'ורדן-שבליי שלו:

$$x = x_s + x_n$$

כיוון שלכל $h \in H$ האופרטור $\text{ad}_L x$ מתחלף עם $\text{ad}_L h$, גם $\text{ad}_L x_s, \text{ad}_L x_n$ מתחלפים עם $\text{ad}_L h$, כלומר $\text{ad}_L [x_s, h] = \text{ad}_L [x_n, h] = 0$ לכל $h \in H$, ולכן $[x_s, h] = [x_n, h] = 0$ לכל $h \in H$, כלומר $x_s, x_n \in C$. לפי משפט שהוכחנו בעבר, שני התנאים האחרונים שהוכחנו על C מבטיחים שהיא דוקטיבית בתוך L . בפרט, יש תת מרחב $C' \subset C$ עבורו $C = H \oplus C'$, כאשר $[C, C'] \subset C'$. כעת C' היא אלגברת לי. נראה כי C' דוקטיבית בתוך L . ראשית, נכתוב

$$L = C \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^r U_j \right)$$

פירוק של L , כאשר U_j אי פריק מעל C . כמובן, U_j מודול מעל C' - ניקח $U_j^0 \subset U_j$ תת מודול אי פריק מעל C' . לכל $h \in H$, $[h, C'] = 0$, ולכן האופרטור

$$\text{adh} : U_j \rightarrow U_j$$

מתחלף עם $\text{ad}_{C'}$. מכאן נקבל כי

$$\text{adh}(U_j^0) \subset U_j$$

תת מודול אי פריק מעל C' (אם הוא לא 0). נגדיר

$$U_j' = \sum_{k, h_1, \dots, h_k} \text{adh}_{h_1} \circ \dots \circ \text{adh}_{h_k}(U_j^0) \subset U_j$$

זהו סכום תת מודולים אי פריקים מעל C' (אולי לא סכום ישר). הוא אינווריאנטי לפעולת $\text{ad}_L H$. לכן $U'_j \subset U_j$ תת מודול (שאינו אפס) מעל C , ולכן $U_j = U'_j$ סכום של תת מודולים אי פריקים מעל C' , ולכן גם הסכום של אותם U_j הוא סכום של תת מודולים אי פריקים מעל C' . נותר לפרק רק את C :

$$C = H \oplus C' = H \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^l W_i \right)$$

כאשר W_i אי פריקים מעל C , ובעצם אי פריקים גם מעל C' . בסך הכל קיבלנו פירוק של L לתת מרחבים אי פריקים ביחס לפעולת C' . מכאן אפשר להוכיח באופן כללי שאפשר להגיע לסכום ישר, ולכן C' רדוקטיבית מעל L . נמשיך את ההוכחה בפעם הבאה.

■