

אלגבראות לי

© ארזים

27 במאי 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 תתי אלגבראות של קרטן

ניזכר בדברים האחרונים שראינו. לכל $x \in L$ יש לנו האופרטור $\text{ad}_L x : L \rightarrow L$, ויש לנו הפירוק

$$L = L^0(x) \oplus L^*(x)$$

כאשר

$$L^0(x) = \{y \in L \mid \exists n \geq 1 \text{ad}_L^n x(y) = 0\}$$

$$L^*(x) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \text{ad}_L^j x$$

כמו כן, האופרטור $\text{ad}_L x|_{L^0(x)}$ נילפוטנטי, והאופרטור $\text{ad}_L x|_{L^*(x)}$ הפיך. אם נסמן $H_x = Fx$, נקבל

$$L = \bigoplus_{\lambda} L_{H_x}^{\lambda}$$

כאשר

$$L_{H_x}^{\lambda} = \{y \in L \mid \exists n \geq 1 (\text{ad}_L x - \lambda I)^n(y) = 0\}$$

ונסמן $L^{\lambda}(x) = L_{H_x}^{\lambda}$. כמובן מתקיים $L^0(x) = L^0$. ראינו כי $L^0(x) \subset L$ תת אלגברת לי. נראה כי

$$[L^0(x), L^*(x)] \subset L^*(x)$$

נניח ראשית כי F סגור אלברית. אזי

$$L = L^*(x) \oplus \left(\bigoplus_{0 \neq \lambda} L^{\lambda}(x) \right)$$

ראינו כי

$$L^*(x) = \bigoplus_{\lambda \neq 0} L^{\lambda}(x)$$

כמו כן ראינו גם כי

$$[L^\lambda(x), L^\mu(x)] \subset L^{\lambda+\mu}(x)$$

בפרט, מתקיים

$$[L^0(x), L^\lambda(x)] \subset L^\lambda(x)$$

ולכן

$$[L^0(x), L^*(x)] = \left[L^0(x), \bigoplus_{i=1}^k L^{\lambda_i}(x) \right] = \bigoplus_{i=1}^k [L^0(x), L^{\lambda_i}(x)] \subset \bigoplus_{i=1}^k L^{\lambda_i}(x) = L^*(x)$$

עברו שדה כללי, קל לבדוק כי

$$\begin{aligned} (L_{\overline{F}})^0(x \otimes 1) &= (L^0(x))_{\overline{F}} \\ (L_{\overline{F}})^*(x \otimes 1) &= (L^*(x))_{\overline{F}} \end{aligned}$$

לכן למעשה הראינו כי במקרה זה כי

$$\begin{aligned} \left[(L_{\overline{F}})^0(x \otimes 1), (L_{\overline{F}})^*(x \otimes 1) \right] &\subset (L_{\overline{F}})^*(x \otimes 1) \\ [L^0(x), L^*(x)]_{\overline{F}} &\subset (L^*(x))_{\overline{F}} \end{aligned}$$

ולכן נקבל את מה שרצינו.

משפט 1.1 יהי $x \in L$ איבר גנרי. אז $L^0(x)$ היא תת אלגברת קרטן. זוהי תת אלגברת קרטן היחידה שמכילה את x .

הוכחה: נסמן $T = L^0(x)$ נגדיר

$$\begin{aligned} S &= \{y \in T \mid \text{ad } y|_{L^*(x)} \text{ is invertible}\} \\ R &= \{y \in T \mid \text{ad } y|_T \text{ is not nilpotent}\} \end{aligned}$$

נשים לב שמתיים $x \in S$. הקבוצות $R, S \subset T$ הן קבוצות פתוחות זריצקי (מוגדרות על ידי אי התאפסות של פולינומים): ככא

$$y \in S \iff \det \text{ad } Y|_{L^*(x)} \neq 0$$

שזו פונקציה פולינומיאלית על T , $f \in F[T]$. כעת, כאשר

$$\det(tI_t - \text{ad } y|_T) = t^l + a_{l-1}(y)t^{l-1} + \dots + a_0(y)$$

כאשר $l = \dim L$ כמובן, לכן,

$$R = T \setminus \{y \in T \mid a_0(y) = \dots = a_{l-1}(y) = 0\}$$

כעת נראה כי R ריקה. נניח בשלילה שלא. אזי $R \cap S \neq \emptyset$ (כי כל שתי קבוצות פתוחות זריצקי לא ריקות נחתכות). יהי $y \in R \cap S$. נחשב את הפולינום האופייני של $\text{ad}_L y$ לפי הפירוק

$$L = L^0(x) \oplus L^*(x)$$

אנחנו יודעים כי $\text{ad}_L y|_{L^*(y)}$ הפיך, ולכן $\lambda = 0$ אינו שורש של הפולינום האופייני של הצמצום הזה. הפולינום האופייני של $\text{ad}_L y|_T$ הוא מהצורה $t^s g(t)$, כאשר $g(0) \neq 0$. כעת, $\text{ad}_L y|_T$ לא נילפוטנטי, ולכן $s < \dim T$. לכן s הוא הריבוי של $\lambda = 0$ בפולינום האופייני של $\text{ad}_L y$, כלומר $s = \dim L^0(y)$. לכן

$$\dim L^0(y) = s < \dim T = \dim L^0(x)$$

בסתירה להנחה כי x גנרי. אם כן, R ריקה, כלומר לכל $y \in T$ האופרטור $\text{ad}_T y$ נילפוטנטי. ממשפט אנגל, T אלגברת לי נילפוטנטית. נותר להראות רק כי $N_L(T) = T$ ונסיים. נניח כי F סגור אלגברית. נפעיל את המשפט מהשיעור שעבר עבור $H_x = Fx$ ונקבל את הפירוק

$$L = L^0(x) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^k L^{\lambda_i}(x) \right) = T \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^k L^{\lambda_i}(x) \right)$$

במשפט הזה הראינו שאם $L^0(x) = T$ נילפוטנטית אז היא תת אלגברת קרטן - ולכן סיימנו במקרה זה. עבור F כללי נקבל כי $(L^0(x))_{\overline{F}} = (L_{\overline{F}})^0(x \otimes 1)$ תת אלגברת קרטן של $L_{\overline{F}}$ ואז גם $L^0(x)$ תת אלגברת קרטן של L . לבסוף, נניח כי $T_1 \subset L$ תת אלגברת קרטן המקיימת $x \in T_1$. נילפוטנטית, וכן $x \in T_1$ ולכן ברור כי $T_1 \subset L^0(x)$. ראינו כי תת אלגברת קרטן היא תת אלגברה נילפוטנטית מקסימלית. לכן, הואל וראינו כי $L^0(x)$ נילפוטנטית, נקבל $T_1 = L^0(x)$. ■

משפט 1.2 נניח כי F סגור אלגברית. תהי L אלגברת לי ממימד סופי מעל F . תהיינה $H, T \subset L$ תת אלגבראות קרטן. אזי יש אוטומורפיזם α של L ששייך לחבורת האוטומורפיזמים שנוצרת על ידי

$$\{\exp(\text{ad}_L(x)) \mid \text{ad}_L x \text{ is nilpotent}\}$$

המקיים

$$\alpha(H) = T$$

הוכחה: ניזכר כי ראינו את הפירוק

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^k L_H^{\lambda_i} \right)$$

כאשר $0 \neq \lambda_i \in H^*$. ראינו כי אם $x \in L_H^{\lambda_i}$ אזי $\text{ad}_L x$ נילפוטנטי. יתר על כן, נניח כי $\dim L = r$ - נראה כי $\text{ad}_L^r x = 0$. זאת משום שמתקיים

$$\text{ad}^r x(L^\mu) \subset L^{r\lambda_i + \mu}$$

אם $\text{ad}^r x \neq 0$, אזי יש μ עבורו

$$\text{ad}^r x(L^\mu) \neq 0$$

ונקבל כי $L^{r\lambda_i+\mu} \neq 0$, ומכאן גם $L^\mu, L^{\mu+\lambda_i}, L^{\mu+2\lambda_i}, \dots$ גם כן אינם 0, ולכן כל אלה מופיעים בסכום הישר למעלה - כלומר

$$\dim L \geq \dim \left(\bigoplus_{j=0}^r L^{\mu+j\lambda_i} \right) = \sum_{j=0}^r \dim L^{\mu+j\lambda_i} \geq r+1$$

ולכן בהכרח $\text{ad}^r x = 0$. לכן למעשה נוכל לכתוב

$$\exp(\text{ad}_L x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\text{ad}^j x}{j!}$$

נגדיר פונקציה

$$f : H \times L_H^{\lambda_1} \times \dots \times L_H^{\lambda_k} \rightarrow L$$

$$f(h, x_1, \dots, x_k) = \exp(\text{ad}_L x_1) \circ \dots \circ \exp(\text{ad}_L x_k)(h)$$

נשים לב שזו פונקציה פולינומיאלית, שכן בעצם נקבל

$$f(h, x_1, \dots, x_k) = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \frac{\text{ad}^j x_1}{j!} \right) \circ \dots \circ \left(\sum_{j=0}^{r-1} \frac{\text{ad}^j x_k}{j!} \right)(h)$$

נראה כי הפונקציה f דומיננטית - משמע, התמונה שלה צפופה זריצקי בתוך L .
אתנחתא: נתונה פונקציה פולינומיאלית בין מרחבים ווקטוריים $f : V \rightarrow U$. אז מוגדר ההומורפיזם של אלגבראות

$$f^* : F[U] \rightarrow F[V]$$

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

f דומיננטית אם ורק אם f^* חד-חד-ערכי. נראה זאת: נניח כי $\overline{f(V)} = U$. נניח כי $\varphi \in \ker f^*$, כלומר $\varphi \circ f = 0$, כלומר $\varphi(f(V)) = 0$. לכן, $\varphi(\overline{f(V)}) = 0$, כלומר $\varphi = 0$. בכיוון השני, אם נניח כי f^* חד-חד-ערכית, נניח בשלילה כי $\overline{f(V)} \subsetneq U$, אז יש $\varphi \in F[U]$ $\varphi \neq 0$ שמקיים $\varphi(\overline{f(V)}) = 0$, ולכן $\varphi \circ f = 0$ כלומר $f^*(\varphi) = 0$ כלומר $\varphi \in \ker f^*$. בסתירה.

נראה תנאי לכך שפונקציה f היא דומיננטית. נניח שקיים $v_0 \in V$ עבורו $df(v_0)$ על. ההעתקה df היא העתקה המשיק של f בנקודה v_0 , שהיא העתקה לינארית בין V לבין U . העתקת משיק זו מתקבלת מתוך התבוננות בפונקציית הפולינומיאלית:

$$v \mapsto f(v_0 + v) = f(v_0) + D_1(v) + D_2(v) + \dots + D_N(v)$$

כאשר $D_i : V \rightarrow U$ פונקציות פולינומיאליות הומוגניות מדרגה i , כלומר $D_i(tv) = t^i D_i(v)$. אם כן, $D_1 : V \rightarrow U$ היא העתקה לינארית - והיא נקראת העתקת המשיק $df(v_0)$, אם כן, נקבל

$$f(v_0 + tv) = f(v_0) + tD_1(v) + t^2 D_2(v) + \dots + t^N D_N(v)$$

$$\frac{1}{t} (f(v_0 + t \cdot v) - f(v_0)) \big|_{t=0} = D_1(v) = df(v_0)$$

אם כן, נניח כי $df(v_0)$ על. לשם נוחיות, נניח כי $v_0 = 0$ ונניח כי $f(v_0) = 0$. נניח בשלילה כי f לא דומיננטית. אזי f^* לא חד-חד-ערכית, ולכן יש פונקציה $\varphi \in F[U]$ $\varphi \neq 0$ עם $f^*(\varphi) = 0$. נכתוב כעת

$$\varphi = \varphi_l + \varphi_{l+1} + \dots + \varphi_m$$

כאשר $\varphi_j \in F[U]$ הומוגניות מדרגה j , $\varphi_l \neq 0$. מהנחת השלילה שלנו, לכל $v \in V$ מתקיים

$$\varphi(f(v)) = 0 = \sum_{j=l}^m \varphi_j(f(v)) = \sum_{j=1}^m \varphi_j \left(\sum_{i=1}^N D_i(v) \right)$$

את האיבר הראשון בסכום זה נוכל לכתוב

$$\varphi_l(D_1(v) + \dots + D_N(v)) = \varphi_l(D_1(v)) + \xi(v)$$

כאשר ξ פונקציה פולינומיאלית על V שהיא סכום של פולינומים הומוגניים מדרגות שגדולות ממש מאשר $l+1$. נסיק כי כל המחוברים ההומוגניים הם 0 (לפי הדרגות). בפרט, $\varphi_l \circ D_1 = 0$. הנחנו כי $D_1 = df(v_0)$ על U , ולכן נקבל כי $\varphi_l = 0$ בסתירה.

משפט 1.3 נניח כי f דומיננטית, אזי לכל תת קבוצה פתוחה ולא ריקה $V' \subset V$ התמונה $f(V')$ מכילה קבוצה פתוחה לא ריקה.

במשפט הזה נשתמש ללא הוכחה (הוא בא מהעולם של טופולוגיה אלגברית). נחזור לנקודה שהיינו -

$$f: H \times L_H^{\lambda_1} \times \dots \times L_H^{\lambda_k} \rightarrow L$$

$$f(h, x_1, \dots, x_k) = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \frac{\text{ad}^j x_1}{j!} \right) \circ \dots \circ \left(\sum_{j=0}^{r-1} \frac{\text{ad}^j x_k}{j!} \right) (h)$$

נחשב את $df(h_0, 0, \dots, 0)$, שהיא העתקה לינארית. נקבל

$$df(h_0, 0, \dots, 0)(h, 0, \dots, 0) = \frac{1}{t} (f(h_0 + th, 0, \dots, 0) - f(h_0, 0, \dots, 0)) = h$$

$$df(h_0, 0, \dots, 0)(0, x_1, 0, \dots, 0) = \frac{1}{t} (f(h_0, tx_1, 0, \dots, 0) - f(h_0, 0, \dots, 0)) = \frac{1}{t} (\exp(tx_1)(h_0) - h_0) =$$

$$= \frac{1}{t} \left(h_0 + \text{ad} x_1(h_0) + \frac{t^2}{2} \text{ad}^2 x_1(h) + \dots - h_0 \right) =$$

$$=|_{t=0} \text{ad} x_1(h_0) = [x_1, h_0] \in L_H^{\lambda_1}$$

אם כן,

$$df(h_0, 0, \dots, 0)(h, x_1, \dots, x_k) = h + \sum_{i=1}^k [x_i, h_0]$$

נגדיר כעת

$$H' = \{h_0 \in H \mid \lambda_1(h_0), \dots, \lambda_k(h_0) \neq 0\}$$

זו תת קבוצה פתוחה זריצקי. לכל $h_0 \in H'$ נקבל כי לאופרטור $\text{ad}_L h_0|_{L_H^{\lambda_i}}$ יש ערך עצמי אחד בלבד, והוא λ_i - שאינו אפס, כלומר האופרטור הזה הפיך. לכן

$$\text{ad}_{h_0}(L_H^{\lambda_i}) = [L_H^{\lambda_i}, h_0] = L_H^{\lambda_i}$$

זה מבטיח שהעתקת המשיק $df(h_0, 0 \dots, 0)$ חד-חד-ערכית ועל - ולכן בפרט f דומיננטית. לפי המשפט שציטטנו בלי להוכיח, התמונה $f(H' \times L_H^{\lambda_1} \times \dots \times L_H^{\lambda_k})$ מכילה תת קבוצה פתוחה זריצקי A שאינה ריקה. נעשה אותו דבר עבור T ונמצא תת קבוצה פתוחה $\emptyset \neq B \subset L$ פתוחה כמו למעלה. אזי

$$A \subset \bigcup_{s \in \text{Aut}_e(L)} s(H')$$

כאשר $\text{Aut}_e(L)$ היא חבורת האוטומורפיזמים של L שנוצרת על ידי

$$\{\exp(\text{ad}_L x) \mid \text{ad}_L x \text{ is nilpotent}\}$$

ובאותה צורה

$$B \subset \bigcup_{s \in \text{Aut}_e(L)} s(T')$$

יש לנו שתי קבוצות פתוחות זריצקי לא ריקות, ולכן החיתוך $A \cap B$ גם כן לא ריק. לכן יש $h_1 \in H', t_1 \in T', s_1, s_2 \in \text{Aut}_e(L)$ עבורם

$$s_1(h_1) = s_2(t_1)$$

נסמן

$$\alpha = s_1^{-1} s_2$$

אזי $\alpha \in \text{Aut}_e(L)$, וכן $\alpha(t_1) = h_1$. נראה כי

$$H = L^0(h_1)$$

כמובן שמתקיים $H \subset L^0(h_1)$ שכן H נילפוטנטית. להיפך, אם $y \in L^0(h_1)$, נכתוב את y לפי הפירוק:

$$y = v_0 + v_1 \dots + v_k$$

כאשר $v_0 \in H, v_i \in L_H^{\lambda_i}$ עבור n טבעי גדול מספיק נקבל כי

$$0 = \text{ad}^n h_1(y) = \text{ad}^n h_1(v_0) + \sum_{i=1}^k \text{ad}^n h_1(v_i)$$

הואיל ואנחנו יודעים כי H נילפוטנטית נקבל שעבור n גדול מספיק גם $\text{ad}^n h_1(v_0) = 0$, והרי $\text{ad}^n h_1(v_i) \in L_H^{\lambda_i}$, ולכן נקבל כי בהכרח $\text{ad}^n h_1(v_i) = 0$. ההעתקה $\text{ad} h_1|_{L_H^{\lambda_i}}$ הפיכה כי יש לה ערך עצמי יחיד - $\lambda_i(h_1) \neq 0$. לכן גם $\text{ad}^n h_1$ הפיכה, ולכן $v_i = 0$ לכל i .

לכן נקבל כי $y = v_0 \in H$, ולכן נקבל את השוויון שרצינו. אם כן נקבל (באותו אופן עבור T):

$$\begin{aligned} H &= L^0(h_1) \\ T &= L^0(t_1) \end{aligned}$$

כעת,

$$\alpha(T) = \alpha(L^0(t_1)) = L^0(\alpha(t_1)) = L^0(h_1) = H$$

■

מסקנה 1.4 תהי L אלגברת לי מעל F . תהי H תת אלגברת קרטן. אזי $\dim H = \text{rank } L$. איבר $x \in H$ הוא גנרי אם ורק אם בפירוק מעל $\bar{F}$

$$L_{\bar{F}} = H_{\bar{F}} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^k (L_H^{\lambda_i})_{\bar{F}} \right)$$

מתקיים $\lambda_i(x) \neq 0$ לכל i .

הוכחה: בשביל החלק הראשון אפשר להניח כי F סגור אלגברית (כי כל המושגים כאן נשמרים בהרחבת סקלרים). לפי המשפט, ברור שלכל שתי תת אלגבראות קרטן יש את אותו מימד. יהי $x \in L$ גנרי. ראינו כי $L^0(x)$ היא תת אלגברת קרטן. לכן

$$\dim H = \dim L^0(x) = \text{rank}(H)$$

נגדיר H' כמו קודם. ראינו בהוכחה הקודמת שאם $x \in H'$ אזי $H = L^0(x)$. לכן, $\dim L^0(x) = \dim H = \text{rank}(H)$, כלומר x גנרי. להיפך, נניח כי $x \in H$ גנרי. ראינו כי $L^0(x)$ היא תת אלגברת קרטן. H נילפוטנטית, ולכן $x \in H$, אבל $H \subset L^0(x)$ נילפוטנטית מקסימלית (כתת אלגברת קרטן) כלומר $H = L^0(x)$. נניח בשלילה כי $\lambda_1(x) = 0$ (1 אינדקס שרירותי). מכאן נקבל כי $\text{ad } x|_{L_H^{\lambda_1}}$ נילפוטנטי. מההגדרה נקבל כי $L_H^{\lambda_1} \subset L^0(x) = H$. נסיק כי $x \in H'$ כמו שרצינו. ■

1.2 מערכת השורשים באלגברת לי פשוטה למחצה ביחס לתת אלגברת קרטן מתפצלת מעל השדה

החל מכאן נכתוב L^λ במקום L_H^λ .

הגדרה 1.5 נאמר כי תת אלגברת קרטן H של אלגברת לי L מעל שדה F מתפצלת (split) מעל F אם לכל $x \in H$, הערכים העצמיים של $\text{ad}_L x$ נמצאים בשדה F (כלומר $\text{ad}_L x$ ניתן לשילוש מעל F). באותם סימונים כמו קודם, אם $0 \neq \lambda \in H^*$ המקיים $L_H^\lambda \neq 0$, נאמר כי λ הוא שורש (root) של L ביחס לתת האלגברה H . קבוצת השורשים של L ביחס לתת האלגברה H תסומן $R(L, H)$.

משפט 1.6 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה, ותהי H תת אלגברת קרטן מתפצלת מעל F . נסמן $R = R$ נפרק

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} L^\alpha \right)$$

פירוק זה נקרא פירוק קרטן של L ביחס לתת האלגברה H . כל הבאים מתקיימים:

1. לכל $\alpha \in R(L, H)$ מתקיים $\dim L^\alpha = 1$.
2. (א) H תת אלגברה קומוטטיבית.
 (ב) לכל $h \in H$ ולכל $x \in L_H^\alpha$ מתקיים $\text{ad}_L h(x) = [h, x] = \alpha(h) \cdot x$
 (ג) לכל $\alpha, \beta \in R \cup \{0\}$ מתקיים $[L^\alpha, L^\beta] \subset L^{\alpha+\beta}$
 (ד) לכל $\alpha \in R$ גם $-\alpha \in R$.
 (ה) לכל $\alpha \in R$ נקבל $[L^\alpha, L^{-\alpha}] = H_\alpha$ ממימד 1 ונוצר על ידי איבר h_α עבורו $\alpha(h_\alpha) = 2$.
3. (א) לכל $\alpha, \beta \in R \cup \{0\}$ כך שמתקיים $\alpha + \beta \neq 0$ מתקיים $\kappa_L(L^\alpha, L^\beta) = 0$.
 (ב) לכל $\alpha \in R \cup \{0\}$, התבנית $\kappa_L|_{L^\alpha \times L^{-\alpha}}$ לא מנוונת. בפרט, התבנית $\kappa_L|_{H \times H}$ לא מנוונת.
 (ג) לכל $x, y \in H$ מתקיים

$$\kappa_L(x, y) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(x) \alpha(y)$$

4. מתקיים $H^* = \text{Span} R$.

5. לכל $\alpha \in R$ תת המרחב

$$S_\alpha = H_\alpha \oplus L^\alpha \oplus L^{-\alpha}$$

הוא תת אלגברת לי ממימד 3. נבחר $x_\alpha \in L^\alpha$ אז יש איבר $x_{-\alpha} \in L^{-\alpha}$ יחיד כך שמתקיים $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$. נתבונן בהעתקה הלינארית

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{sl}_2 F &\rightarrow S_\alpha \\ \varphi(e) &= x_\alpha \\ \varphi(h) &= h_\alpha \\ \varphi(f) &= x_{-\alpha} \end{aligned}$$

ונקבל איזומורפיזם של אלגבראות לי.

הוכחה: ראשית נבדוק מה אנחנו כבר יודעים. את הפירוק שמוצג בתחילת המשפט ראינו כבר, וגם את סעיפים ג, 3 ראינו כבר. מכל אלה, ומכך שהנחנו כי L פשוטה למחצה, נקבל כי κ_L לא מנוונת. נניח כי $\alpha \in R$. מסעיף 3 נקבל כי

$$\begin{aligned} \kappa(L^\alpha, H) &= 0 \\ \kappa(L^\alpha, L^\beta) &= 0 \forall \beta \neq -\alpha \end{aligned}$$

מכאן נקבל כי בהכרח $L^{-\alpha} \neq 0$ - אחרת L^α היה מאונך לכל L - זה סעיף ד2. כמו כן נסיק כי $\kappa|_{L^\alpha \times L^{-\alpha}}$ לא מנוונת, בפרט גם עבור $\alpha = 0$, שהרי $H = L^0$. זה מוכיח גם את 3. ראינו כי עבור $x, y \in H$ מתקיים

$$\kappa_L(x, y) = \sum_{\alpha \in R} \dim L^\alpha \alpha(x) \alpha(y)$$

נניח כי $x \in H$ איבר שעבורו $\alpha(x) = 0$ לכל $\alpha \in R$. אזי אגף ימין הוא 0, כלומר $\kappa_L(x, y) = 0$ לכל $y \in H$ - אבל $\kappa_L|_{H \times H}$ לא מנוונת, ולכן נקבל כי $x = 0$ בהכרח. מכאן נקבל את סעיף 4. כעת, יהי $h \in H$. נכתוב את פירוק ז'ורדן-שבליי שלו:

$$h = d + n$$

לכל $\alpha \in R$ ולכל $x \in L^\alpha$ נקבל כי

$$d(x) = \alpha(h) \cdot x$$

כי $\text{ad}_L d$ פועל אלכסוני. כך גם נקבל כי לכל $x \in H$ מתקיים $d(x) = 0$. מכאן נראה כי d הוא אופרטור גזירה על L , כלומר

$$d([z, z']) = [d(z), z'] + [z, d(z')]$$

די להראות את זה עבור $z \in L^\alpha, z' \in L^\beta$ כאשר $\alpha, \beta \in R \cup \{0\}$. כעת, $[z, z'] \in L^{\alpha+\beta}$, כלומר

$$\begin{aligned} d([z, z']) &= (\alpha + \beta)(h) [z, z'] = [\alpha(h) z, z'] + [z, \beta(h) z'] = \\ &= [d(z), z'] + [z, d(z')] \end{aligned}$$

■