

אלגבראות לי

© ארזים

20 במאי 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 תת אלגבראות של קרטן

משפט 1.1 תהי L אלגברת לי (ממימד סופי מעל F). תהי $H \subset L$ תת אלגברת לי נילפוטנטית. נניח כי לכל $x \in H$ האופרטור $\pi(x) = \text{ad}_L x$ ניתן לשילוש מעל F . לכל $\lambda \in H^*$

$$L_H^\lambda = \{v \in L \mid \forall x \in H \exists n = n_{x,v} (\pi(x) - \lambda(x))^n v = 0\}$$

אזי מתקיים:

1.

$$L = \bigoplus_{\lambda \in H^*} L_H^\lambda$$

2. לכל $\lambda, \mu \in H^*$ מתקיים $[L_H^\lambda, L_H^\mu] \subset L_H^{\lambda+\mu}$. בפרט, $[L_H^\lambda, L_H^0] \subset L_H^\lambda$.

3. $L_H^0 \subset L$ היא תת אלגברת לי המכילה את H .

4. H היא תת אלגברת קרטן אם ורק אם $L_H^0 = H$.

5. אם L_H^0 היא תת אלגברת לי נילפוטנטית, אזי היא תת אלגברת קרטן.

הוכחה: ממשפט לי, ומכיוון שידוע לנו כי H נילפוטנטית (ובפרט פתירה), ניתנת לשילוש סימולטני. לכן יש בסיס B של L עבורו $[\pi(x)]_B$ משולשת עליונה לכל $x \in H$. נסמן את האלכסון של $[\pi(x)]_B$ בתור $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$. הטיעונים הבאים שנערוך (לסעיפים 1,2) תקפים לכל הצגה π של H שכל אופרטור שלה ניתן לשילוש.

1. ראשית נניח כי $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$. במקרה זה, המטריצה $[\pi(x) - \lambda I]_B$ היא משולשית עליונה עם אלכסון שכולו אפסים - ולכן חזקת n שלה מתאפסת. לכן נקבל

$$V_\pi = V_H^\lambda$$

כאן ברור גם כי לכל $\lambda \neq \mu \in H^*$ נקבל $V_H^\mu = 0$. כעת, נניח כי לא כל הערכים λ_i שווים זה לזה, כלומר יש איבר $x_0 \in H$ עבורו לא כל הערכים $\lambda_i(x_0)$ זהים. יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ כל הערכים העצמיים השונים של $\pi(x_0)$. אזי יש פירוק

$$V_\pi = \bigoplus_{i=1}^r V(\alpha_i)$$

כאשר

$$V(\alpha_i) = \{v \in V \mid \exists n = n_v \ (\pi(x_0) - \alpha_i I)^n v = 0\}$$

נראה כי המרחב $V(\alpha_i)$ הוא תת מרחב אינווריאנטי תחת π , כלומר לכל $y \in H$ נרצה להראות כי

$$\pi(y)(V(\alpha_i)) \subset V(\alpha_i)$$

נשים לב, באינדוקציה, כי מתקיים

$$(\pi(x_0) - \alpha_i I)^n \pi(y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \pi(\text{ad}^{n-j} x_0(y)) (\pi(x_0) - \alpha_i I)^j$$

למשל, עבור $n = 1$ נקבל

$$\begin{aligned} (\pi(x_0) - \alpha_i I) \pi(y) &= \pi(x_0) \pi(y) - \alpha_i \pi(y) = \pi(y) \pi(x_0) + \pi([x_0, y]) - \alpha_i \pi(y) = \\ &= \pi(y) (\pi(x_0) - \alpha_i I) + \pi(\text{ad}_L x_0(y)) \end{aligned}$$

במקרה הכללי:

$$(\pi(x_0) - \alpha_i I)^{n+1} \pi(y) = (\pi(x_0) - \alpha_i I)^n (\pi(y) \pi(x_0) - \alpha_i \pi(y) + \pi(\text{ad}_L x_0(y))) = \dots$$

מכאן מציבים את הנחת האינדוקציה ומקבלים את הנדרש בקלות. אם כן, יהי $v \in V(\alpha_i)$. נניח כי $(\pi(x_0) - \alpha_i I)^N v = 0$. ניקח $n = 2N$ ונקבל

$$(\pi(x_0) - \alpha_i I)^{2N} \pi(y) v = \sum_{j=0}^{2N} \binom{2N}{j} \pi(\text{ad}^{2N-j} x_0(y)) (\pi(x_0) - \alpha_i I)^j v$$

אם $j \geq N$, נקבל $(\pi(x_0) - \alpha_i I)^j v = 0$. אם $j < N$ אזי $2N - j > N$. H נילפוטנטית, ולכן נניח גם כי $\text{ad}_H^N x = 0$ לכל $x \in H$ (אפשר להגדיל את N אם צריך), ואז נקבל כי $\text{ad}^{2N-j} x_0(y) = 0$. זה מראה כי $\pi(y) v \in V(\alpha_i)$ לכל $y \in H$. מתקיים $\dim V(\alpha_i) < \dim V_\pi$, ולכן באינדוקציה

$$V(\alpha_i) = \bigoplus_{j=1}^{n_i} V(\alpha_i)_H^{\lambda_{i,j}}$$

כאשר $\lambda_{i,j} \in H^*$, וכן

$$V(\alpha_i)_H^{\lambda_{i,j}} = \{v \in V(\alpha_i) \mid \forall x \in H \exists n = n_{x,v} \ (\pi(x) - \lambda_{i,j}(x) I)^n v = 0\}$$

נקבל אם כן כי

$$V = \bigoplus_{i=1}^r \left(\bigoplus_{j=1}^{n_i} V(\alpha_i)_H^{\lambda_{i,j}} \right)$$

נשים לב כי עבור j, j' ועבור $i_1 \neq i_2$, נקבל $\lambda_{i_1,j} \neq \lambda_{i_2,j'}$, שכן

$$\lambda_{i_1,j}(x_0) = \alpha_{i_1} \neq \alpha_{i_2} = \lambda_{i_2,j}(x_0)$$

כך הוכחנו את סעיף 1.

2. יהיו $u \in L_H^\lambda, v \in L_H^\mu$. נרצה להראות כי

$$(\pi(x) - (\lambda(x) + \mu(x))I)^n [u, v] = 0$$

עבור n גדול מספיק. עבור $n = 1$, נקבל

$$\begin{aligned} \pi(x) ([u, v]) - (\lambda(x) + \mu(x)) [u, v] &= [\pi(x)u, v] + [u, \pi(x)v] - (\lambda(x) + \mu(x)) [u, v] = \\ &= [(\pi(x) - \lambda(x)I)u, v] + [u, (\pi(x) - \mu(x)I)v] \end{aligned}$$

עבור n כללי מראים באינדוקציה כי

$$(\pi(x) - (\lambda(x) + \mu(x))I)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} [(\pi(x) - \lambda(x)I)^j u, (\pi(x) - \mu(x)I)^{n-j} v]$$

עבור n גדול מספיק אחד האיברים בכל קומוטטור יהיה 0 - כלומר זה מתאפס עבור n גדול מספיק (שתלוי כמובן בערכים x, u, v). בזאת סיימנו את סעיף 2 - כמובן שהמקרה הפרטי $\mu = 0$ נובע.

3. (מכאן נחזור לזכור כי $\pi = \text{ad}$) מהסעיף הקודם נקבל כי $L_H^0 \subset [L_H^0, L_H^0] \subset L_H^0$. (מכאן נחזור לזכור כי $\pi = \text{ad}$) מהסעיף הקודם נקבל כי $L_H^0 \subset [L_H^0, L_H^0] \subset L_H^0$. נילפוטנטיות, ולכן יש n (אפילו קבוע) כך שלכל $y \in H$ מתקיים

$$\text{ad}_H^n y = 0$$

ולכן לכל $x \in H$ מתקיים

$$\text{ad}^n y(x) = 0$$

ולכן $x \in L^0$. בסך הכל נקבל כי $H \subset L^0$ כפי שרצינו.

4. נסמן $N = N_L(H)$. לכל $x \in H$, מההגדרה מתקיים בהכרח כי

$$\text{ad}x(N) \subset H$$

מכאן נקבל כי

$$\text{ad}^{j+1}x(N) \subset \text{ad}^jx(H)$$

אגף ימין מתאפס עבור j גדול מספיק שכן H נילפוטנטית. לכן נקבל כי $N \subset L_H^0$, ולכן $H \subset N \subset L_H^0$. לכן אם $L_H^0 = H$ נקבל כי $N = H$ ולכן H תת אלגברת קרטן. להיפך, נניח כי H תת אלגברת קרטן, כלומר $N = H$. נניח בשלילה כי $H \subsetneq L_H^0$. נתבונן באותו L_H^0 בתור מרחב הצגה של H על ידי ההצגה $\sigma|_{L_H^0}$. $\sigma(x) = \text{ad}x|_{L_H^0}$. הוא תת מרחב אינווריאנטי. תהי $\bar{\sigma}$ ההצגה של H במרחב המנה L_H^0/H . ברור כי σ ניתנת לשילוש וכן $\bar{\sigma}$. השילוש של $\bar{\sigma}$ הוא במטריצות משולשיות עליונות נילפוטנטיות, כלומר יש להן 0 על האלכסון - בפרט קיים $\bar{x}_0 \in L_H^0/H$ ווקטור עצמי סימולטני של $\bar{\sigma}(H)$ ביחס לערך העצמי אפס - $\bar{\sigma}(x)(\bar{x}_0) = 0$ לכל $x \in H$. אם כן, לכל $x \in H$ נקבל כי

$$[x, x_0] \in H$$

כלומר $x_0 \in L_H^0 \setminus H$ ובפרט $x_0 \in N_L(H) \setminus H$, בסתירה להנחה שלנו כי $N_L(H) = H$.

5. נניח כי L_H^0 תת אלגברת לי נילפוטנטית. נחזור על הסעיפים הקודמים עבור $\mathcal{H} = L_H^0$, ונקבל תת אלגברת לי

$$\mathcal{L}_H^0 = L_{\mathcal{H}}^0 = \{v \in L \mid \forall x \in \mathcal{H} \exists n = n_{x,v} \text{ ad}^n x(v) = 0\}$$

אנחנו יודעים כי $L_H^0 = \mathcal{H} \supset H$, ובפרט, לכל $x \in H$ ולכל $v \in \mathcal{L}_H^0$ יש n עבורו $\text{ad}^n x(v) = 0$, ולכן $v \in L_H^0$ - לכן הראינו כי

$$\mathcal{L}_H^0 \subset L_H^0$$

נסיק כי למעשה $\mathcal{L}_H^0 = L_H^0 = \mathcal{H}$ ומסעיף 4 נסיק כי $\mathcal{H} = L^0$ תת אלגברת קרטן.

■

מסקנה 1.2 תהי $H \subset L$ תת אלגברת קרטן. אזי H היא תת אלגברת לי נילפוטנטית מקסימלית.

הוכחה: נניח כי F סגור אלגברית. תהי $H \subset H' \subset L$ תת אלגברת לי נילפוטנטית. מכאן יש n טבעי כך שלכל $x \in H$ ולכל $x' \in H'$ מתקיים

$$\text{ad}^n x(x') = 0$$

שכן H נילפוטנטית. לכן נקבל כי

$$x' \in L_H^0$$

אם כן, הראינו כי $H' \subset L_H^0$. לפי סעיף 4 במשפט הקודם, $L_H^0 = H$ שכן H תת אלגברת קרטן. בסך הכל נקבל כי $H' = H$. עבור F כללי, ראינו כי $H_{\overline{F}} \subset L_{\overline{F}}$ תת אלגברת קרטן. כמו כן $H_{\overline{F}} \subset H'_{\overline{F}}$ נילפוטנטית, ולכן

$$H' \otimes_F \overline{F} = H'_{\overline{F}} = H_{\overline{F}} = H \otimes_F \overline{F}$$

■

מכאן $H' \otimes 1 \subset H \otimes \overline{F}$ ולכן $H' \subset H$ - כלומר $H' = H$.

אם כן, כאשר H תת אלגברת קרטן נקבל כי

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n L_H^{\lambda_i} \right)$$

כאשר $\lambda_i \in H^*$, $0 \neq \lambda_i$, והמטריצות של $\text{ad}_L x$ לפי הבסיס המשלש B הן מטריצות בלוקים אלכסוניות - כל בלוק הוא משולשי עליון, עם הערך $\lambda_i(x)$ על האלכסון, ויש גם בלוק אחד (הראשון) שבו אפסים על האלכסון (בלוק זה בגודל $\dim H$).

טענה 1.3 בהנחות המשפט, תהי κ_L תבנית קילינג של L .

1. יהיו $\lambda, \mu \in H^*$ עבורם $\lambda + \mu \neq 0$, אזי

$$\kappa_L(L_H^\lambda, L_H^\mu) = 0$$

2. לכל $\lambda \in H^*$ מתקיים $0 \neq \lambda$

$$\kappa_L(H, L_0^\lambda) = 0$$

3. לכל $x, y \in H$ מתקיים

$$\kappa_L(x, y) = \sum_{\lambda \in H^*} (\dim L_H^\lambda) \lambda(x) \lambda(y)$$

הוכחה:

1. נניח כי $x \in L_H^\lambda, y \in L_H^\mu$ ויהי ν עבורו $L_H^\nu \neq 0$. אזי

$$\begin{aligned} \text{ad}x(L_H^\nu) &\subset L_H^{\nu+\lambda} \\ \text{ad}y \circ \text{ad}x(L_H^\nu) &\subset L_H^{\nu+(\lambda+\mu)} \end{aligned}$$

לכן, אם $\lambda + \mu \neq 0$ וכן $L^{\nu+\lambda+\mu} \neq 0$, נסיק כי

$$\text{tr}(\text{ad}x \circ \text{ad}y) = 0$$

ולמעשה המטריצה $\text{ad}x \circ \text{ad}y$ נילפוטנטית.

2. מקרה פרטי של 1, שכן $H \subset L_H^0$.

3. יהי $x, y \in H$. המטריצה של $\text{ad}_L x$ תהיה שוב מטריצת בלוקים אלכסונית כמו קודם - פשוט במקום בלוק ראשון בגודל $\dim H$ נקבל בלוק ראשון בגודל $\dim L_H^0$.
לאו דווקא קרטן ולכן לאו דווקא $L_H^0 = H$. באותה צורה גם עבור $\text{ad}_L y$. אם כן, המטריצה $\text{ad}_L x \circ \text{ad}_L y$ תהיה מכפלה של שתי מטריצות בלוקים שכאלה. על ידי הצבה ובדיקה ישירה בדיוק

$$\kappa_L(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_L x \circ \text{ad}_L y) = \sum_{i=1}^n \dim L_H^{\lambda_i} \lambda_i(x) \lambda_i(y)$$

■

משפט 1.4 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה. תהי $H \subset L$ תת אלגברת לי נילפוטנטית עברה האופרטורים $\text{ad}_L x$ ניתנים לשילוש מעל F לכל $x \in H$. אזי L_H^0 רדוקטיבית בתוך L .

הוכחה: נכתוב את הפירוק

$$L = L_H^0 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in R} L_H^\lambda \right)$$

כמו במשפט. בטענה ראינו כי $\kappa_L(L_H^0, L_H^\lambda) = 0$ לכל $\lambda \in H^*$, $\kappa_L \neq 0$. לא מנוונת, ולכן נסיק כי $\kappa_L|_{L_H^0 \times L_H^0} = 0$. לא מנוונת. יהי $x \in L_H^0$. נכתוב $x = x_s + x_m$, ונראה כי $x_s, x_n \in L^0$. יהי $y \in H$ יש m טבעי עבורו $\text{ad}^m y(x) = 0$. נכתוב $y = y_s + y_n$ ואז

$$\text{ad}_L y = \text{ad}_L y_s + \text{ad}_L y_n$$

ניזכר כי $\text{ad}_L y_s$ הוא פולינום ללא איבר חופשי של $\text{ad}_L y$ במקדמים מתוך $\overline{F}$. מכאן נקבל כי $\text{ad}_L y_s \cdot \text{ad}^m y_s(x) = 0$. איבר פשוט למחצה (ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$), ולכן x ווקטור עצמי של $\text{ad}^m y_s$ עם ערך עצמי 0. לכן למעשה x ווקטור עצמי גם של $\text{ad}_L y_s$ עם ערך עצמי 0 - כלומר $[y_s, x] = 0$, כלומר $\text{ad}_L x(y_s) = 0$. אותו נימוק בדיוק מראה כי $[y_s, x_s] = 0$. מכאן, עבור k גדול מספיק נקבל כי

$$\text{ad}^k y(x_s) = 0$$

נזכור כי $\text{ad}_L y_s, \text{ad}_L y_n$ מתחלפים, ועל כן

$$\text{ad}^k y(x_s) = (\text{ad}_L y_s + \text{ad}_L y_n)^k(x_s) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \text{ad}^{k-j} y_n \text{ad}^j y_s(x_s) = \text{ad}^k y_n(x_s)$$

כל שאר המחוברים מתאפסים בגלל שראינו $[y_s, x_s] = 0$. כעת, $\text{ad}_L y_n$ נילפוטנטי, ולכן נקבל 0 עבור k גדול מספיק. $y \in H$ היה כלשהו, ועל כן נקבל כי $x_s \in L_H^0$ - ועל כן כמובן גם $x_n \in L_H^0$. ■

כעת עבור $x \in L$ נתבונן בפולינום האופייני של $\text{ad}_L x$ -

$$\det(t \cdot I_L - \text{ad}_L x) = t^n + a_{n-1}(x)t^{n-1} + \dots + a_1(x)t + a_0(x)$$

המקדמים $a_i(x)$ הם פונקציות פולינומאליות על L . כמובן נקבל כי $a_0(x) = 0$. יהי l הטבעי הראשון עבורו הפונקציה $x \mapsto a_l(x)$ אינה זהותית 0.

הגדרה 1.5 l הזה ייקרא הדרגה של אלגברת לי L , ונסמן $l = \text{rank} L$.

עבור $x \in L$ נגדיר

$$L^0(x) = \{v \in L \mid \exists n = n_v \text{ ad}^n x(v) = 0\}$$

כמובן $x \in L^0(x)$. אפשר לבחור בסיס של $L^0(x)$ ולהשלים אותו לבסיס של L כך שהמטריצה של $\text{ad}_L x$ ביחס לבסיס זה היא מטריצת בלוקים:

$$\begin{pmatrix} N(x) & * \\ 0 & A(x) \end{pmatrix}$$

כאשר $N(x)$ נילפוטנטית עליונה, $A(x)$ הפיכה. נעיר כי הגודל של $N(x)$ הוא $\dim L^0(x)$. אם כן,

$$\det(tI_L - \text{ad}_L x) = t^j \det(tI_{n - \dim L^0(x)} - A(x))$$

כאן $a_0(x) = \dots = a_{j-1}(x) = 0$, $a_j(x) \neq 0$. אם כן, נקבל כי

$$\text{rank} L = \min_{x \in L} \dim L^0(x)$$

טענה 1.6 יהי $F \subset K$ שדה הרחבה. אזי

$$\text{rank}_F L = \text{rank}_K L_K$$

הוכחה: נסמן $l = \text{rank}_F L$. נבחר $x \in L$ עבורו $a_l(x) \neq 0$ (בסימונים הקודמים, $\dim_F L^0(x) = l$). נבחר בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ של L מעל F . אזי $\{v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1\}$ בסיס של L_K מעל K . מתקיים

$$\text{ad}_{L_K}(x \otimes 1) = \text{ad}_L x \otimes 1$$

ועל כן

$$[\text{ad}_{L_K}(x \otimes 1)]_{\overline{B}} = [\text{ad}_L x]_B$$

מכאן נקבל כי

$$\begin{aligned} \det(tI_{L_K} - \text{ad}_{L_K}(x \otimes 1)) &= \det(tI_L - \text{ad}_L x) = \\ &= t^n + a_{n-1}(x)t^{n-1} + \dots + a_l(x)t^l \end{aligned}$$

נסיק כי $\text{rank}_K L_K \leq l$. נניח בשלילה כי $\text{rank}_K L_K = l' < l$. לכל $z \in L^K$, נכתוב

$$z = \sum_{i=1}^n s_i \cdot (v_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^n (v_i \otimes s_i)$$

לכן

$$[\text{ad}_{L_K} z]_{\overline{B}} = \left[\sum_{i=1}^n s_i \cdot \text{ad}_{L_K}(v_i \otimes 1) \right]_{\overline{B}} = \sum_{i=1}^n s_i [\text{ad}_L v_i]_B$$

זהו צירוף לינארי של המטריצות $[\text{ad}_L v_i]_B \in M_n(F)$ במקדמים $s_1, \dots, s_n \in K$. לכן,

$$\det \left(tI_n - \sum_{i=1}^n s_i [\text{ad}_L v_i]_B \right) = t^n + b_{n-1}(s_1, \dots, s_n)t^{n-1} + \dots + b_{l'}(s_1, \dots, s_n)t^{l'}$$

כאשר $b_j(s_1, \dots, s_n)$ הם פולינומים מתוך $F[s_1, \dots, s_n]$. הנחנו כי $l' < l$, ועל כן $b_{l'}(s_1, \dots, s_n) = 0$ אם $s_1, \dots, s_n \in F$ (שכן זה יהיה פולינום אופייני של $\text{ad}_L x$ כלשהו, עבור $x \in L$). נסיק כי בהכרח $b_{l'}(t_1, \dots, t_n)$ הוא פולינום האפס, כלומר כל מקדמיו אפס - בסתירה לכך שמתקיים $\text{rank}_K L_K = l'$. ■

תזכורת (או אולי השלמה) מאלגברה לינארית: נתון אופרטור לינארי $A : V \rightarrow V$, כאשר V מרחב ווקטורי ממימד סופי מעל F . נסמן, כמו קודם

$$V^0 = \{v \in V \mid \exists m A^m v = 0\}$$

נגדיר

$$V^* = \bigcap_i A^i(v)$$

זו סדרה יורדת אז אין משמעות לאינדקס ההתחלתי. אזי

$$V = V^0 \oplus V^*$$

כמו כן

$$\begin{aligned} A(V^0) &\subset V^0 \\ A(V^*) &\subset V^* \end{aligned}$$

בנוסף, $A|_{V^0}$ נילפוטנטי, וכן $A|_{V^*}$ הפיך.

הוכחה: ניזכר במשפט הפירוק הפרימארי עבור A : יהי $m_A(t)$ הפולינום המינימלי של A . נפרק

$$m_A(t) = p_1(t)^{s_1} \cdots p_k(t)^{s_k}$$

כאשר $p_i(t) \in F[t]$ פולינומים אי פריקים שונים זה מזה (וכמובן $s_i \geq 1$). נגדיר

$$U_i = \ker(P_i(A)^{s_i})$$

ברור שמתקיים

$$A(U_i) \subset U_i$$

המשפט אומר שמתקיים

$$V = \bigoplus_{i=1}^k U_i$$

לשם כך נגדיר

$$f_i(t) = \frac{m_A(t)}{p_i(t)^{s_i}}$$

אלה פולינומים זרים (אין מחלק משותף לכולם בו זמנית). לכן קיימים פולינומים $g_i(t) \in F[t]$ עבורם

$$1 = \sum_{i=1}^k g_i(t) f_i(t)$$

כשנציב A נקבל

$$\text{Id} = \sum_{i=1}^k g_i(A) f_i(A)$$

וכשנפעיל על ווקטור v נקבל

$$v = \sum_{i=1}^k g_i(A) f_i(A) v$$

כעת, $v \in U_i$, $f_i(A)$ שכן הפעלת $p_i(A)^{s_i}$ תאפס אותו - וכך מקבלים את המשפט. כמו כן

$$m_{A|U_i}(t) = p_i(t)^{s_i}$$

אם הפולינום האופייני

$$c_A(t) = p_1(t)^{r_1} \cdots p_k(t)^{r_k}$$

כאשר כמובן $r_i \geq s_i$, אזי

$$c_{A|U_i}(t) = p_i(t)^{r_i}$$

כאשר F סגור אלגברית נקבל כי p_i הם בהכרח ממעלה ראשונה:

$$p_i(t) = t - \lambda_i$$

אז נקבל כי

$$U_i = \ker((A - \lambda_i I)^{s_i}) = \{v \in V \mid (A - \lambda_i I)^{s_i} v = 0\}$$

נטען שזה שווה ממש למרחב V^{λ_i} . הכלה אחת ברורה - נראה את השנייה. יהי $v \in V^{\lambda_i}$. נכתוב

$$v = u_1 + \cdots + u_k$$

ואז נקבל כי

$$(A - \lambda_i I)^s v = \sum_{j=1}^n (A - \lambda_i I)^s u_j$$

אם s גדול מספיק זה 0 - וכן, אם s גדול מספיק נוכל להשמיט את המחובר $j = i$ באגף ימין. בגלל שהפירוק שלנו היה לסכום ישר נקבל כי

$$(A - \lambda_i I)^s u_j = 0$$

לכל $j \neq i$ - כלומר $u_j = 0$ לכל $j \neq i$, כי $A - \lambda_i I$ הפיך בצמצום אל U_j לכל $j \neq i$. זה מוכיח את ההכלה שרצינו.

נחזור למקרה של F כללי. נניח כי $V^0 \neq 0$ (אחרת הכל טריוויאלי), ולכן

$$m_A(t) = t^m \cdot p_2(t)^{s_2} \cdots p_k(t)^{s_k}$$

כלומר $t = p_1, m = s_1$. נחזור על מה שעשינו עכשיו ונראה שמתקיים

$$U_1 = V^0$$

נסמן

$$W = \bigoplus_{i=2}^k U_i$$

כעת,

$$A^j V = A^j V^0 + A^j W$$

עבור j גדול מספיק המחובר הראשון מתאפס, כלומר

$$A^j V = A^j W = \bigoplus_{i=2}^k A^j U_i$$

האופרטור $A|_W$ הפיך, כי $\lambda = 0$ לא ערך עצמי שלו (הוצאנו את המרחב העצמי המוכלל של 0). אם כן,

$$V^* = \bigcap_j A^j V = \bigcap_j A^j W = W$$

■

זה כמובן מוכיח את כל מה שרצינו.

הפירוק $V = V^0 \oplus V^*$ נקרא פירוק פיטינג (Fitting) של V ביחס לאופרטור A . אנחנו נתעניין במקרה $A = \text{ad}_L x$, בו $V^0 = L^0(x)$,

$$V^* = \bigcap_j \text{ad}_L^j x(L) =: L^*(x)$$

ואז נוכל לכתוב

$$L = L^0(x) \oplus L^*(x)$$

הגדרה 1.7 $x \in L$ ייקרא גנרי אם $\dim L^0(x) = \text{rank} L$.

אנחנו נראה שאם x גנרי אזי $L^0(x)$ תת אלגברת קרטן.