

אלגבראות לי

© ארזים

6 במאי 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 אלגבראות לי רדוקטיביות

משפט 1.1 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה מממד סופי מעל שדה F . תהי $M \subset L$ תת אלגברת לי שעבורה התבנית $\kappa_L|_{M \times M}$ אינה מנונת, וכן כך שלכל $x \in M$, המחוברים בפירוק ז'ורדן-שבליי של x שניהם מתוך M גם כן. אזי M רדוקטיבית בתוך L .

הוכחה: ראשית נראה כי M רדוקטיבית. נסמן $\pi = \text{ad}_L|_M$ הצגה של M במרחב L . נראה כי π פריקה לחלוטין. ניזכר באידאל הנילפוטנטיות של $\mathcal{N}_\pi$ - אידאל של M שמכיל כל אידאל J עבורו $\pi(J)$ מורכבת רק מאופרטורים נילפוטנטיים. ניזכר גם שהראינו כי $\mathcal{N}_\pi$ מאונך לכל M ביחס לתבנית

$$b_\pi(x, y) = \text{tr}(\pi(x)\pi(y))$$

במקרה שלנו,

$$b_\pi(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_L x (\text{ad}_L y)) = \kappa_L(x, y)$$

הנחנו כי התבנית בצד ימין לא מנונת על $M \times M$, ולכן בהכרח נקבל כי $\mathcal{N}_\pi = 0$. ראינו ביטוי נוסף עבור אידאל זה: אם

$$L = V_n \supset V_{n-1} \supset \dots \supset V_1 \supset V_0 = 0$$

סדרת הרכבת של π , ואם נסמן את ההצגה של M במרחב V_{i+1}/V_i (הצגה אי פריקה), אזי

$$\mathcal{N}_\pi = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker \pi_i$$

נתבונן כעת בהצגה

$$\rho = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \pi_i$$

זו כמובן הצגה פריקה לחלוטין של M . היא גם חד-חד-ערכית, שכן

$$\ker \rho = \mathcal{N}_\pi = 0$$

נניח כעת כי F סגור אלגברית, ונתבונן במנה $V_{\pi_i} = \pi_i / \text{Rad}M$ כיוון שהרדיקאל של M הוא אידאל פתיר, ניתן לשלש את המנה הזו סימולטנית, ובפרט יש פונקציונאל לינארית $\lambda \in (\text{Rad}M)^*$ שמקיים

$$V_{\pi_i, \lambda} = \{w \in V_{\pi_i} \mid \pi_i(x)w = \lambda(x)w \forall x \in \text{Rad}M\} \neq 0$$

כיוון שהרדיקאל $\text{Rad}M$ הוא אידאל של M , ראינו כי $V_{\pi_i, \lambda}$ הוא תת מרחב אינווריאנטי של V_{π_i} (כמודולים מעל M). כיוון שההצגה π_i אי פריקה, נקבל $V_{\pi_i, \lambda} = V_{\pi_i}$, ולכן לכל $w \in V_{\pi_i}$ ולכל $x \in \text{Rad}M$ נקבל כי

$$\pi_i(x)w = \lambda(x)w$$

מכאן

$$\pi_i([M, \text{Rad}M]) = [\pi_i(M), \pi_i(\text{Rad}M)] = 0$$

ומכאן נקבל כי גם

$$\rho([M, \text{Rad}M]) = 0$$

כיוון שההצגה ρ חד-חד-ערכית, נקבל כי

$$[M, \text{Rad}M] = 0$$

מכאן, $\text{Rad}M \subset Z(M)$. ההכלה השנייה נכונה תמיד, ולכן נקבל $\text{Rad}M = Z(M)$, כלומר M רדוקטיבית. אם F אינו סגור אלגברית, נשתמש בסימונים הרגילים להרחבות סקלרים ונקבל

$$\text{Rad}(M_{\overline{F}}) = (\text{Rad}M)_{\overline{F}}$$

מההוכחה עד כה נוכל להסיק כי אם σ הצגה אי פריקה של $M_{\overline{F}}$, אזי $\sigma([M_{\overline{F}}, \text{Rad}(M_{\overline{F}})]) = 0$. לכן אם η היא הצגה פריקה לחלוטין של $M_{\overline{F}}$, אזי גם $\eta([M_{\overline{F}}, \text{Rad}(M_{\overline{F}})]) = 0$. נפעיל את זה עבור ההצגה $\eta = \rho_{\overline{F}} = \rho \otimes_F 1_{\overline{F}}$. ראינו בתרגיל בית 3 שאם ρ פריקה לחלוטין אז גם $\rho_{\overline{F}}$ פריקה לחלוטין, ולכן נקבל למעשה כי

$$\rho_{\overline{F}}([M_{\overline{F}}, \text{Rad}(M_{\overline{F}})]) = 0$$

וכן

$$[M_{\overline{F}}, \text{Rad}(M_{\overline{F}})] = [M \otimes_F \overline{F}, \text{Rad}(M) \otimes_F \overline{F}] = [M, \text{Rad}M] \otimes_F \overline{F}$$

אם כן נקבל כי

$$\rho([M, \text{Rad}M]) \otimes_F \overline{F} = 0$$

ולכן

$$\rho([M, \text{Rad}M]) = 0$$

ומכאן מסיימים כמו קודם (ρ) חד-חד-ערכית ולכן $\text{Rad}M = Z(M)$. נראה עכשיו שכל איבר $x \in Z(M)$ הוא פשוט למחצה, כלומר $x_n = 0$. נכתוב את הפירוק

$$x = x_s + x_n$$

לפי ההנחה שלנו $x_s, x_n \in M$. ניזכר כי יש לנו גם הפירוק

$$\text{ad}_L x = \text{ad}_L x_s + \text{ad}_L x_n$$

ניזכר שניתן לכתוב את המחברים בצד ימין כפולינומים ללא איבר חופשי בצד שמאל, כלומר $\text{ad}_L x$, עם מקדמים מתוך $\overline{F}$. נכתוב

$$\text{ad}_L x_n = \sum_{j=1}^l \alpha_j \text{ad}_L^j x$$

כאשר $\alpha_j \in \overline{F}$. לכל $m \in M$ נקבל

$$\text{ad}_L x_n(m) = [x_n, m]$$

נוכל להרחיב סקלרים עד הסגור האלגברי ולפתוח את הסכום - אבל אז נקבל $[x, m]$, והרי $x \in Z(M)$ - כלומר $[x, m] = 0$. לכן נקבל למעשה כי $[x_n, m] = 0$ לכל $m \in M$, משמע $x_n \in Z(M)$. מכאן שלכל $y \in M$ האופרטור $\text{ad}_L x_n \circ \text{ad}_L y$ נילפוטנטי, משמע העקבה שלו 0 - כלומר $\kappa_L(x_n, y) = 0$ לכל $y \in M$. מהנחת חוסר הניוון של κ_L , נקבל כי בהכרח $x_n = 0$, ולכן $x = x_s$ פשוט למחצה. נניח לבינתיים שוב כי F סגור אלגברית. ניזכר שראינו בשבוע שעבר שנוכל לכתוב

$$M = S \oplus \text{Rad}M = S \oplus Z(M)$$

כאשר $S \subset M$ פשוטה למחצה. נתבונן במשפחת האופרטורים

$$\{\text{ad}_L x \mid x \in Z(M)\}$$

זו משפחה קומוטטיבית של אופרטורים ניתנים ללכסון על המרחב L , ולכן ניתנת ללכסון סימולטני. נפרק

$$L = \bigoplus_{\lambda \in Z(M)^*} L_\lambda$$

כאשר

$$L_\lambda = \{v \in L \mid [x, v] = \lambda(x)v \forall x \in Z(M)\}$$

ברור כי לכל L_λ שמופיע בפירוק, הוא מרחב אינווריאנטי לאלגברה S . פשוטה למחצה, ולכן ההצגה של S במרחב L_λ פריקה לחלוטין. כל מחובר אי פריק של L_λ מעל S הוא כזה שעליו $Z(M)$ פועלת על ידי כפל פי λ , ולכן מחובר זה נשאר אי פריק כהצגה של M , וזה מראה לנו כי $\pi(x) = \text{ad}_L x$ פריקה לחלוטין $(x \in M)$. לשדה כללי, נקבל כי $\pi_{\overline{F}} = \pi \otimes_F 1_{\overline{F}}$ פריקה לחלוטין ולכן π פריקה לחלוטין (זה גם כן מתרגיל בית 3). ■

1.2 ההצגות של $\mathfrak{sl}_2 F$

ניקח את הבסיס

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

המקיים

$$[h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h$$

נניח כי F סגור אלגברית (וכמובן ממציין 0). תהי π הצגה ממימד סופי של $\mathfrak{sl}_2 F$ במרחב V . האלגברה $\mathfrak{sl}_2 F$ היא פשוטה למחצה (ואפילו פשוטה). $\pi(h)$ בהכרח ניתן ללכסון, כי h איבר פשוט למחצה (ואפילו נתון בצורה אלכסונית). נכתוב

$$V = \bigoplus_{\lambda \in F} V_\lambda$$

כאשר

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \pi(h)v = \lambda v\}$$

למה 1.2 יהי λ ערך עצמי של $\pi(h)$. אזי

$$\pi(e)V_\lambda \subset V_{\lambda+2}$$

$$\pi(f)V_\lambda \subset V_{\lambda-2}$$

הוכחה: יהי $v \in V_\lambda$. כעת

$$\pi(h)(\pi(e)v) = \pi(e)\pi(h)v + \pi\left(\underbrace{[h, e]}_{=2e}\right)v = \lambda\pi(e)v + 2\pi(e)v = (\lambda+2)\pi(e)v$$

באותה צורה בדיוק נקבל

$$\pi(h)(\pi(f)v) = (\lambda-2)\pi(f)v$$

■

כמובן שיש מספר סופי של ערכים עצמיים של $\pi(h)$, ולכן יש ערך עצמי λ_0 עבורו $V_{\lambda_0} \neq 0$, $V_{\lambda_0+2} = 0$. אם כן, נקבל כי

$$\pi(e)(V_{\lambda_0}) = 0$$

נבחר $v_0 \in V_{\lambda_0}$, $v_0 \neq 0$. אזי $\pi(h)v_0 = \lambda_0 v_0$. נגדיר

$$v_i = \pi(f)^i v_0$$

למה 1.3 מתקיים:

$$1. \pi(h) v_i = (\lambda_0 - 2i) v_i$$

$$2. \pi(f) v_i = v_{i+1}$$

$$3. \pi(e) v_i = i(\lambda_0 - i + 1) v_{i-1} \quad (v_{-1} = 0 \text{ נגדיר})$$

הוכחה: הסעיפים 1,2 ברורים - נראה את 3. באינדוקציה - כמובן $\pi(e) v_0 = 0$ כעת,

$$\begin{aligned} \pi(e) v_{i+1} &= \pi(e) \pi(f) v_i = \pi(f) \pi(e) v_i + \pi([e, f]) v_i = \\ &= i(\lambda_0 - i + 1) \pi(f) v_{i-1} + (\lambda_0 - 2i) v_i = \\ &= (i\lambda_0 - i^2 + i + \lambda_0 - 2i) v_i = ((i+1)\lambda_0 - (i+1)i) v_i = \\ &= (i+1)(\lambda_0 - i) v_i \end{aligned}$$

■

וסיימנו.

יהי $r \geq 0$ עבורו $v_{r+1} = 0$, אבל $v_r \neq 0$. לכן הקבוצה $B = \{v_0, v_1, \dots, v_r\} \subset V$ קבוצה בלתי תלויה לינארית (כי אלה ווקטורים שאינם 0, שהם ווקטורים עצמיים של $\pi(h)$ ביחס לערכים עצמיים שונים זה מזה $\lambda_0, \lambda_0 - 2, \dots, \lambda_0 - 2r$. נסמן כעת

$$U = \text{span} B \subset V$$

זהו תת מרחב אינווריאנטי לפי הלמה האחרונה. כעת,

$$v_{r+1} = 0$$

$$\pi(e) v_{r+1} = 0$$

$$(r+1)(\lambda_0 - r) v_r = 0$$

נקבל אם כן בהכרח שמתקיים $\lambda_0 = r$ (מספר שלם אי שלילי). נכתוב את המטריצות:

$$\begin{aligned} [\pi(h)|_U]_B &= \begin{pmatrix} r & & & \\ & r-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -r \end{pmatrix} \\ [\pi(f)|_U]_B &= \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ [\pi(e)|_U]_B &= \begin{pmatrix} 0 & r & & & \\ & 0 & 2(r-1) & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & r \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

במטריצה האחרונה, בשורה i , מיד מעל האלכסון הראשי יהיה הערך $i(r-i+1)$.

משפט 1.4 יהי F שדה סגור אלגברית. תהי π הצגה אי פריקה ממימד $r+1 \geq 1$ של $\mathfrak{sl}_2 F$ במרחב V . אזי

$$V = \bigoplus_{i=0}^r V_{r-2i}$$

כאשר $\dim V_{r-2i} = 1$ לכל $0 \leq i \leq r$. אפשר לבחור בסיס $B = \{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ של V עבורו $v_i \in V_{r-2i}$, כך שהמטריצות של $\pi(h), \pi(e), \pi(f)$ לפי הבסיס B נתונות על ידי המטריצות שחישבנו לפני רגע.

יהי $r \geq 0$ שלם, ונרשה לשדה שלנו להיות כלשהו (ממציין 0). נגדיר את המטריצות $\rho_r(h), \rho_r(e), \rho_r(f)$ לפי המטריצות שלמעלה. נרחיב כעת את ρ_r להעתקה לינארית

$$\begin{aligned} \rho_r : \mathfrak{sl}_2 F &\rightarrow \mathfrak{gl}_{r+1} F \\ \rho_r(ah + be + cf) &= a\rho_r(h) + b\rho_r(e) + c\rho_r(f) \end{aligned}$$

נטען כי ρ_r היא הצגה של $\mathfrak{sl}_2 F$ במרחב F^{r+1} . כדי לבדוק, מספיק לבדוק שמירת קומוטטורים. יספיק לנו להראות כי

$$\begin{aligned} [\rho_r(h), \rho_r(e)] &= 2\rho_r(e) \\ [\rho_r(h), \rho_r(f)] &= -2\rho_r(f) \\ [\rho_r(e), \rho_r(f)] &= \rho_r(h) \end{aligned}$$

נראה לדוגמה את הראשון.

$$\begin{aligned} [\rho_r(h), \rho_r(e)] &= \begin{pmatrix} r & & & \\ & r-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r & & \\ & 0 & 2(r-1) & \\ & & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & r \\ & & & & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & r & & \\ & 0 & 2(r-1) & \\ & & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & r \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & & & \\ & r-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & r-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \ddots & i(r-2i)(r-i+1) & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ddots & i(r-2(i+1))(r-i+1) & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \ddots & 2i(r-i+1) & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = 2\rho_r(e) \end{aligned}$$

ובצורה זו נוכל לחשב גם את השוויונות האחרים.

טענה 1.5 ρ_r הצגה אי פריקה של $\mathfrak{sl}_2 F$.

הוכחה: יהי $U \subset F^{r+1}$ תת מרחב אינווריאנטי. המטריצה $\rho_r(h)$ אלכסונית, ולכן ברור כי $\rho_r(h)|_U$ ניתנת ללכסון מעל F . ניקח לה וקטור עצמי $u_0 \in U, u_0 \neq 0$, כלומר יש $0 \leq i_0 \leq r$ עבורו

$$\rho_r(h)u_0 = (r-2i_0)u_0$$

לפי הגדרת ρ_r , כשנסמן $V = F^{r+1}$, נקבל

$$V = \bigoplus_{i=0}^r V_{r-2i}$$

ולכן $\dim V_{r-2i} = 1$ לכל i . מכאן $V_{r-2i_0} \subset U$. אפשר לבחור $u_0 = e_{i_0+1}$ (האיבר מהבסיס הסטנדרטי שבו יש 1 בקואורדינטה $i+1$). כעת מתיאור המטריצות של ρ_r , ברור למשל כי

$$\rho_r(f)^i u_0 = e_{i_0+i+1}$$

ולכן $e_{i_0+1}, \dots, e_{r+1} \in U$. באופן דומה, כשנפעיל את $\rho_r(e)^i$, נקבל כפולות של e_{i_0+1-i} . בסך הכל, נקבל כי $U = V = F^{r+1}$. לכן קיבלנו כי ρ_r אי פריקה. ■

משפט 1.6 יהי F שדה ממוצין 0. תהי π הצגה אי פריקה במרחב V מממד $r+1 \geq 1$ של $\mathfrak{sl}_2 F$. אזי π שקולה להצגה ρ_r .

הוכחה: יהי B בסיס של V . נסמן

$$\pi'(x) = [\pi(x)]_B$$

לכל $x \in \mathfrak{sl}_2 F$. כעת נרחיב לסגור האלגברי $\bar{F}$: לכל $\alpha, \beta, \gamma \in \bar{F}$ נגדיר

$$\pi'_{\bar{F}}(\alpha e + \beta h + \gamma f) = \alpha \pi'(e) + \beta \pi'(h) + \gamma \pi'(f)$$

זו הצגה של $\mathfrak{sl}_2 \bar{F}$ במרחב $\bar{F}^{r+1}$. אנו יודעים כי $\pi'(h)$ ניתנת ללכסון מעל $\bar{F}$. ראינו קודם כי הערכים העצמיים של $\pi'(h)$ בתוך $\bar{F}$ הם מספרים שלמים, ובפרט הם בשדה F . לכן $\pi'(h)$ ניתנת ללכסון מעל F . עכשיו נוכל לחזור על כל מה שעשינו קודם, ולקבל כי π' שקולה להצגה ρ_r . ■

מסקנה 1.7 תהי π הצגה מממד סופי של $\mathfrak{sl}_2 F$. אזי π מתפרקת בצורה הבאה:

$$\pi \cong \bigoplus_{i=1}^k \rho_{r_i}$$

כאשר $r_1, \dots, r_k \geq 0$ שלמים.

בהקשר של המסקנה, נוכל לתאר קונקרטי את מספר המחברים האי פריקים. נניח כי $r \geq 0$ שלם וזוגי. נתבונן בהצגה ρ_r במרחב V_{ρ_r} . הערכים העצמיים הם מהצורה $r-2i$. הנחנו כי r זוגי ולכן אחד הערכים העצמיים הוא 0. כלומר

$$\begin{aligned} \dim(V_{\rho_r})_{\lambda=0} &= 1 \\ \dim(V_{\rho_r})_{\lambda=1} &= 0 \end{aligned}$$

כאשר $r \geq 0$ שלם אי זוגי נקבל בדיוק הפוך:

$$\begin{aligned} \dim(V_{\rho_r})_{\lambda=0} &= 0 \\ \dim(V_{\rho_r})_{\lambda=1} &= 1 \end{aligned}$$

לכן נקבל כי מספר המחברים האי פריקים בפירוק של π שווה בדיוק

$$\dim(V_\pi)_{\lambda=0} + \dim(V_\pi)_{\lambda=1}$$

כעת, ניקח $m, n \geq 0$ שני שלמים. נתאר את הפירוק של ההצגה

$$\pi = \rho_m \otimes \rho_n$$

שהיא ממימד $(m+1)(n+1)$. נסמן $V_n = V_{\rho_n}, V_m = V_{\rho_m}$. נבחר בסיסים

$$B_m = \{v_{m,k}\}_{k=0}^m$$

$$B_n = \{v_{n,j}\}_{j=0}^n$$

כך הם מלכסנים בהתאמה את $\rho_m(h), \rho_n(h)$. כלומר מתקיים

$$\rho_m(h) v_{m,k} = (m-2k) v_{m,k}$$

$$\rho_n(h) v_{n,j} = (n-2j) v_{n,j}$$

אנחנו יודעים כי

$$B = \{v_{m,k} \otimes v_{n,j}\}_{j,k=0}^{n,m}$$

בסיס למרחב $V_n \otimes V_m$. הוקטורים הללו נותנים לכסון של $\pi(h)$:

$$\begin{aligned} \pi(h)(v_{m,k} \otimes v_{n,j}) &= \rho_m(h)(v_{m,k}) \otimes v_{n,j} + v_{m,k} \otimes \rho_n(h)(v_{n,j}) = \\ &= (m-2k)(v_{m,k} \otimes v_{n,j}) + (n-2j)(v_{m,k} \otimes v_{n,j}) = \\ &= (m+n-2(k+j))(v_{m,k} \otimes v_{n,j}) \end{aligned}$$

נפרק

$$\pi = \rho_m \otimes \rho_n = \bigoplus c_l \rho_l$$

הריבוי של $m+n$ כערך עצמי הוא 1 כי צריך שיתקיים

$$2(k+j) = 0$$

וזה ייתכן רק כאשר $k=j=0$. זה הערך העצמי הגדול ביותר שמופיע. מכאן נסיק כי ρ_{m+n} מופיעה בפירוק פעם אחת בדיוק (כלומר $c_{m+n} = 1$). הריבוי של $m+n-2$ הוא 2:

$$2(k+j) = 2$$

$$k+j = 1$$

כלומר $\{k, j\} = \{0, 1\}$ - 2 אפשרויות. $m+n-2$ הוא ערך עצמי שמופיע פעם אחת גם בהצגה ρ_{m+n} , ולכן הפעם הנוספת תהיה חייבת להגיע מההצגה ρ_{m+n-2} - שגם היא תופיע פעם אחת בדיוק. באופן הזה נמשיך - הערך העצמי הבא הוא $m+n-4$, שמכריח

$$k+j = 2$$

נקבל 3 אפשרויות - $\{0, 2\}$ או $\{1, 1\}$. שתיים מהופעות אלה באות משתי ההצגות הקודמות שראינו, ולכן נקבל שגם ρ_{m+n-4} תופיע בדיוק פעם אחת. נוכל להמשיך באינדוקציה ולקבל כי

$$\pi = \rho_m \otimes \rho_n = \bigoplus_{j=0}^s \rho_{m+n-2s}$$

אם נשווה מימדים נקבל כי

$$\begin{aligned} (m+1)(n+1) &= \sum_{j=0}^s (m+n-2j+1) = \frac{(s+1)}{2} (m+n+1+m+n-2s+1) = \\ &= (s+1)(m+n+1-s) \end{aligned}$$

נסמן $z = s+1$ ואחרי העברת אגפים נקבל את המשוואה

$$(z - (m+1))(z - (n+1)) = 0$$

כלומר $z = m+1$ או $z = n+1$, משמע $s = m$ או $s = n$. נצטרך כי $s = \min(m, n)$, כי אחרת נקבל הצגה ρ_r עם אינדקס שלילי. בסך הכל נקבל

$$\pi = \rho_m \otimes \rho_n = \bigoplus_{j=0}^{\min(n,m)} \rho_{m+n-2j}$$

המחובר האחרון הוא

$$\rho_{|m-n|}$$

זה מקרה פרטי של נוסחה מפורסמת בשם נוסחת קלבש-גורדן (Clebsch-Gordan).

1.3 תת אלגבראות של קרטן (Cartan)

הגדרה 1.8 תהי L אלגברת לי ממימד סופי. תהי $H \subset L$ תת אלגברת לי. נאמר כי H תת אלגברת קרטן אם H נילפוטנטית, וכן

$$\mathcal{N}_L(H) = H$$

דוגמא באלגברת לי $\mathfrak{gl}_n F$, תת האלגברה $d_n F$ היא תת אלגברת קרטן. בבירור היא נילפוטנטית (כי היא אבליית). נחפש מטריצות A המקיימות

$$[A, d_n F] \subset d_n F$$

הקומוטטור הוא מהצורה

$$[A, \text{diag}(d_j)] = ((d_j - d_i) A_{i,j})_{i,j}$$

נרצה שלכל $j \neq i$ ולכל $d_1, \dots, d_n$ יתקיים $(d_i - d_j) x_{i,j} = 0$ כדי שהמטריצה המתקבלת תהיה אלכסונית, כלומר נצטרך $A_{i,j} = 0$ לכל $j \neq i$, כלומר $A \in d_n F$.

טענה 1.9 יהי $F \subset K$ שדה הרחבה. אזי $H \subset L$ תת אלגברת קרטן אם ורק אם $H_K \subset L_K$ תת אלגברת קרטן.

הוכחה: אנחנו מכירים כבר את התנאי הזה עבור נילפוטנטיות - כלומר H נילפוטנטית אם ורק אם H_K נילפוטנטית. לגבי התכונה השנייה, נראה כי

$$\mathcal{N}_{L_K}(H_K) = (\mathcal{N}_L(H))_K$$

באופן כללי. נבחר בסיס $\{t_\alpha\}_{\alpha \in J}$ של K מעל F . יהי

$$w = \sum_{\alpha \in J} x_\alpha \otimes t_\alpha \in \mathcal{N}_{L_K}(H_K)$$

כאשר $x_\alpha \in L$. בפרט, לכל $h \in H$ מתקיים

$$[w, h \otimes 1] = \sum_{\alpha} [x_\alpha, h] \otimes t_\alpha \in H_K$$

לכן יש $y_\alpha \in H$ עבורם

$$\sum_{\alpha} [x_\alpha, h] \otimes t_\alpha = \sum_{\alpha} y_\alpha \otimes t_\alpha$$

ונסיק כי $[x_\alpha, h] = y_\alpha \in H$. כלומר $x_\alpha \in \mathcal{N}_L(H)$, לכן, $w \in (\mathcal{N}_L(H))_K$. כלומר הראינו

$$\mathcal{N}_{L_K}(H_K) \subset (\mathcal{N}_L(H))_K$$

ההכלה השנייה קלה, ולכן השוויון. אם H תת אלגברת קרטן, אזי $\mathcal{N}_L(H) = H$, כלומר

$$\mathcal{N}_{L_K}(H_K) = (\mathcal{N}_L(H))_K = H_K$$

ולכן גם H_K היא תת אלגברת קרטן. להיפך, אם H_K תת אלגברת קרטן, אזי $\mathcal{N}_{L_K}(H_K) = H_K$, אזי

$$(\mathcal{N}_L(H))_K = H_K$$

ומכאן ברור כי

$$\mathcal{N}_L(H) \subset H$$

ההכלה השנייה נכונה תמיד, ולכן השוויון - ומכאן שגם H תת אלגברת קרטן. ■