

אלגבראות לי

© ארזים

6 במאי 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 פירוק ז'ורדן-שבליי

יהי V מרחב ווקטורי ממימד סופי מעל F . ראינו לכל $x \in \mathfrak{gl}(V)$ יש פירוק יחיד

$$x = x_s + x_n$$

כאשר $x_s, x_n \in \mathfrak{gl}(V)$ ניתן ללכסון מעל $\bar{F}$, x_n נילפוטנטי, וכן x_s, x_n מתחלפים. יתר על כן, ניתן לכתוב את x_s, x_n כפולינומים (ללא איבר חופשי) של x במקדמים מתוך $\bar{F}$. זה נקרה פירוק ז'ורדן-שבליי של x . מכאן נובע גם עוד פירוק ז'ורדן-שבליי:

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_s + \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_n$$

משפט 1.1 יהי V מרחב ווקטורי ממימד סופי מעל F . תהי $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ אלגברת לי פשוטה למחצה. לכל $x \in L$, אם נכתוב את פירוק ז'ורדן-שבליי של x בתור $x = x_s + x_n$, אזי $x_s, x_n \in L$.

הוכחה: ראשית נבצע רדוקציה למקרה של שדה סגור אלגברית. אם הוכחנו במקרה הזה, נרחיב סקלרים לסגור האלגברי:

$$L_{\bar{F}} = L \otimes_F \bar{F} \subset \mathfrak{gl}(V_{\bar{F}}) = \mathfrak{gl}(V \otimes_F \bar{F}) \cong \mathfrak{gl}(V) \otimes_F \bar{F}$$

ניזכר שאת פירוק ז'ורדן-שבליי קיבלנו מתוך פירוק ז'ורדן של $x \otimes 1$:

$$x \otimes 1 = x_s \otimes 1 + x_n \otimes 1$$

כמובן, $L_{\bar{F}}$ פשוטה למחצה, ולכן מההנחה נקבל כי $x_n \otimes 1, x_s \otimes 1 \in L_{\bar{F}}$, ומכאן כמובן נובע כי $x_s, x_n \in L$. נוכיח כעת במקרה של שדה סגור אלגברית. נתבונן במרחב V במרחב הצגה של L . ממשפט ווייל, נוכל לכתוב

$$V = \bigoplus_{i=1}^k W_i$$

כאשר $W_i \subset V$ תתי מרחבים אינווריאנטיים ואי פריקים. תהי S קבוצת כל תתי המרחבים של V שאינווריאנטיים לפעולת L . לכל $W \in S$ נגדיר

$$L_W = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid x(W) \subset W, \operatorname{tr}(x|_W) = 0\}$$

זו בבירור תת אלגברת לי של $\mathfrak{gl}(V)$, שמכילה את L , ואכן, L פשוטה למחצה, ולכן $L = [L, L]$, ולכן לכל $x \in L$ מתקיים $\operatorname{tr}(x|_W) = 0$. נתבונן באוסף

$$\mathcal{N}(L) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, L] \subset L\}$$

ונגדיר

$$\tilde{L} = \mathcal{N}(L) \cap \left(\bigcap_{W \in S} W \right)$$

נקבל $\tilde{L} \subset \mathfrak{gl}(V)$ תת אלגברת לי המכילה את L . יהי $x \in \tilde{L}$. נראה כי $x_s, x_n \in \tilde{L}$. יהי $W \in S$. כיוון שניתן לכתוב את x_s, x_n בתור פולינומים של x במקדמים מתוך F , נקבל $x_s(W), x_n(W) \subset W$. נילפוטנטי, ולכן $\operatorname{tr}(x_n|_W) = 0$ והרי $\operatorname{tr}(x|_W) = 0$, ולכן $\operatorname{tr}(x_s|_W) = 0$. נותר להראות כי $x_s, x_n \in \mathcal{N}(L)$. ניזכר כי יש לנו את פירוק ז'ורדן-שבליי הבא:

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_s + \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_n$$

שני המחוברים בצד ימין הם פולינומים בצד שמאל עם מקדמים מתוך F . כיוון מתקיים $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_s(L), \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_n(L) \subset \mathcal{N}(L)$, שהרי $x \in \mathcal{N}(L)$, נקבל שגם המחוברים $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x(L), \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_n(L) \subset \mathcal{N}(L)$. כלומר $x_s, x_n \in \mathcal{N}(L)$. ובסך הכל הוכחנו כי $x_s, x_n \in \tilde{L}$ - כלומר $\tilde{L}$ מקיים את המשפט שרצינו. לבסוף, נוכיח כי $L = \tilde{L}$. בבירור $L \subset \tilde{L}$ אידאל פשוט למחצה. לפי משפט קודם יש איזשהו אידאל $R \subset \tilde{L}$ עבורו $\tilde{L} = L \oplus R$. נרצה להראות כי $R = 0$. יהי $f \in R$. אזי, כיוון שגם $f \in \tilde{L}$, בפרט, $f \in L_{W_i}$, לכל $1 \leq i \leq k$. לכן $f(W_i) \subset W_i$. נראה כי $f|_{W_i}$ מתחלף עם פעולת L . יהי $x \in L$, אזי

$$x(f(w)) = x(f(w)) - f(x(w)) + f(x(w)) = [x, f](w) + f(x(w)) = f(x(w))$$

איפסנו את $[x, f]$ שכן זהו קומוטטור של איברים מתוך L, R - והסכום שלהם ישר. מהלמה של שור, נקבל כי $f|_{W_i} = \lambda_i \operatorname{Id}_{W_i}$, כאשר $\lambda_i \in F$ סקלר כלשהו. כעת, $f \in \tilde{L}$, ולכן $\operatorname{tr}(f|_{W_i}) = 0$ - והרי $\operatorname{tr}(f|_{W_i}) = \dim W_i \cdot \lambda_i$. ומכאן $\lambda_i = 0$, והכרחי כי $f = 0$ על כל W_i . כלומר $R = 0$ וסיימנו. ■

מסקנה 1.2 בתנאי המשפט, יהי $x \in L \subset \mathfrak{gl}(V)$. אזי x ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$ (בהתאמה, x נילפוטנטי) אם ורק אם $\operatorname{ad}_L x$, כהעתקה לינארית $L \rightarrow L$, ניתן ללכסון מעל $\overline{F}$ (בהתאמה, נילפוטנטי).

הוכחה: מתקיים

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_s + \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_n$$

והרי מתקיים $x_s, x_n \in L$ ולכן $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_s(L), \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_n(L) \subset L$. לכן גם $\operatorname{ad}_L x = \operatorname{ad}_L x_s + \operatorname{ad}_L x_n$ פירוק ז'ורדן-שבליי של $\operatorname{ad}_L x$ - נשים לב שגם $\operatorname{ad}_L x_s$ ניתן ללכסון מעל

$\bar{F}$, וכמובן $\text{ad}_L x_n$ נילפוטנטי. למעשה הראינו שאם $x = x_s + x_n$ פירוק ז'ורדן-שבליי של $x \in L$ אזי $\text{ad}_L x = \text{ad}_L x_s + \text{ad}_L x_n$ גם פירוק ז'ורדן-שבליי של $\text{ad}_L x$. בפרט, $\text{ad}_L x = \text{ad}_L x_s \iff x = x_s$ שהרי L פשוטה למחצה, ולכן $Z(L) = 0$, כלומר $\text{ad}_L x = \text{ad}_L x_n \iff x = x_n$. באותה צורה $\text{ad}_L x = \text{ad}_L x_n \iff x = x_n$. ■

משפט 1.3 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה ממימד סופי מעל F . יהי $x \in L$. התנאים הבאים שקולים:

1. $\text{ad}_L x$ נתן ללכסון מעל $\bar{F}$ (בהתאמה, נילפוטנטי).
 2. יש הצגה חד-חד-ערכית π ממימד סופי של L עברה $\pi(x)$ אופרטור נתן ללכסון מעל $\bar{F}$ (בהתאמה, נילפוטנטי).
 3. לכל הצגה ממימד סופי σ של L , $\sigma(x)$ אופרטור ניתן ללכסון מעל $\bar{F}$ (בהתאמה, נילפוטנטי).
- הוכחה:** 2 $\Rightarrow$ 3: נבחר $\pi = \text{ad}_L$, שהיא חד-חד-ערכית שהרי L פשוטה למחצה.
 2 $\Rightarrow$ 1: מתקיים

$$\text{ad}_{\pi(L)} \pi(x) (\pi(y)) = [\pi(x), \pi(y)] = \pi([x, y]) = \pi \circ \text{ad}_L x (y)$$

כלומר

$$\text{ad}_{\pi(L)} \pi(x) \circ \pi = \pi \circ \text{ad}_L x$$

כלומר

$$\text{ad}_L x = \pi^{-1} \text{ad}_{\pi(L)} \pi(x) \pi$$

כלומר האופרטורים $\text{ad}_L x$, $\text{ad}_{\pi(L)} \pi(x)$ דומים, ולכן אם $\pi(x)$ ניתן ללכסון מעל $\bar{F}$ (נילפוטנטי) אזי לפי המסקנה הקודמת גם $\text{ad}_{\pi(L)} \pi(x)$ ניתן ללכסון מעל $\bar{F}$ (נילפוטנטי), ולכן גם $\text{ad}_L x$ ניתן ללכסון מעל $\bar{F}$ (נילפוטנטי).
 נותר לנו 3 $\Rightarrow$ 1: תהי σ הצגה ממימד סופי של L במרחב V_σ . נסמן $L' = L / \ker \sigma$. זאת אלגברת לי פשוטה למחצה. נסמן $x' = x + \ker \sigma$. כעת

$$\text{ad}_{L'} x' (y') = [x', y'] = [x, y] + \ker \sigma = \text{ad}_L x (y) + \ker \sigma$$

מכאן גם $\text{ad}_{L'} x'$ ניתן ללכסון (נילפוטנטי) מעל $\bar{F}$. ההצגה σ' של L' המוגדרת

$$\sigma'(y') = \sigma(y)$$

היא חד-חד-ערכית. כמו קודם,

$$\text{ad}_{L'} x' = \sigma'^{-1} \text{ad}_{\sigma'(L')} \sigma'(x') \sigma'$$

ומכאן נסיק כי $\text{ad}_{\sigma'(L')} \sigma'(x')$ ניתן ללכסון מעל $\bar{F}$ (נילפוטנטי). מהמסקנה הקודמת, נקבל כי $\sigma'(x') \in \text{gl}(V_\sigma)$ אופרטור ניתן ללכסון מעל $\bar{F}$ (נילפוטנטי). מכאן בבירור גם $\sigma(x)$ ניתן ללכסון מעל $\bar{F}$ (נילפוטנטי), שכן לכל $v \in V_\sigma$ מתקיים

$$\sigma'(x') v = \sigma(x) v$$

■

הגדרה 1.4 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה מעל F . יהי $x \in L$ המקיים את התכונות השקולות במשפט. נאמר כי x הוא איבר פשוט למחצה (בהתאמה נילפוטנטי).

משפט 1.5 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה. לכל $x \in L$ יש פירוק יחיד בצורה $x = x_s + x_n$ כאשר $x_s \in L$ איבר פשוט למחצה, $x_n \in L$ איבר נילפוטנטי, וכן $[x_s, x_n] = 0$.

הוכחה: קיום:

$$L \xrightarrow{\sim} \text{ad}_L L \subset \text{gl}(L)$$

שכן $Z(L) = 0$, על ידי $\text{ad}_L x$ נכתוב כעת את פירוק ז'ורדן-שבליי:

$$\text{ad}_L x = y_s + y_n$$

כאשר $y_s, y_n \in \text{gl}(L)$ עם התנאים המתאימים. כעת, $\text{ad}_L(L)$ אלגברת לי פשוטה למחצה, מוכלת בתוך $\text{gl}(L)$, אזי $y_s, y_n \in \text{ad}_L L$ לפי המשפט הראשון שראינו היום. יהיו x_s, x_n (היחידים) המקיימים

$$y_s = \text{ad}_L x_s$$

$$y_n = \text{ad}_L x_n$$

(מחד-חד-ערכיות של ad_L). נקבל מכאן כי $x = x_s + x_n$, וכן $[x_s, x_n] = 0$. אם כן, $\text{ad}_L x_s = y_s$ ניתן ללכסון מעל $\bar{F}$, ולכן x_s פשוט למחצה. באותה צורה, x_n נילפוטנטי. נעבור להוכחת היחידות: נניח כי $x = x'_s + x'_n$ פירוק נוסף שכזה. נסיק כי

$$\text{ad}_L x = \text{ad}_L x'_s + \text{ad}_L x'_n$$

פירוק ז'ורדן-שבליי נוסף של $\text{ad}_L x$, ולכן נקבל

$$\text{ad}_L x_s = \text{ad}_L x'_s \Rightarrow x_s = x'_s$$

$$\text{ad}_L x_n = \text{ad}_L x'_n \Rightarrow x_n = x'_n$$

■

1.2 אלגבראות לי רדוקטיביות

משפט 1.6 תהי L אלגברת לי ממימד סופי מעל שדה F . אזי קיימת תת אלגברת לי $M \subset L$ פשוטה למחצה עברה

$$L = M \oplus \text{Rad} L$$

כסכום ישר של מרחבים ווקטוריים.

הוכחה: בהנתן תת-אלגברת לי $M \subset L$ עברה $L = M \oplus \text{Rad} L$, אזי $M \cong L/\text{Rad} L$ כאלגבראות לי (לפי האיזומורפיזם שנובע מהסכום הישר של המרחבים הווקטוריים). מכאן נקבל כי M אוטומטית פשוטה למחצה.

אם $\text{Rad} L = 0$, ניקח $M = L$ וסיימנו. נמשיך באינדוקציה על $\dim_F \text{Rad} L$. נניח ראשית כי יש אידאל $J \subset L$ עבורו $J \subsetneq \text{Rad} L$ ו- $0 \neq J$. מתקיים

$$\text{Rad}(L/J) = \text{Rad} L/J$$

ולכן מתקיים

$$\dim \text{Rad}(L/J) < \dim \text{Rad}(L)$$

ולכן באינדוקציה יש פירוק

$$L/J = N/J \oplus \text{Rad}L/J$$

כאשר $J \subset N \subset L$ אלגברת לי. כמו כן, N/J פשוטה למחצה, כלומר $\text{Rad}(N/J) = 0$.
 $J \subset \text{Rad}L$ ולכן פתיר, ועל כן גם $J \subset \text{Rad}N$, ואם כך נקבל

$$\text{Rad}N = J$$

כמו כן, נסיק כי $L = N + \text{Rad}L$ וכן

$$N \cap \text{Rad}L = J$$

כיוון שמתקיים $\dim \text{Rad}N = \dim J < \dim \text{Rad}L$, נקבל באינדוקציה פירוק

$$N = M \oplus \text{Rad}N = M \oplus J$$

נראה כי $L = M \oplus \text{Rad}L$. ראשית,

$$M \cap \text{Rad}L = M \cap N \cap \text{Rad}L = M \cap J = 0$$

אם כן, כעת

$$\begin{aligned} L &= N + \text{Rad}L = (M + \text{Rad}N) + \text{Rad}L = \\ &= M + \text{Rad}L \end{aligned}$$

המעבר האחרון נכון שכן $\text{Rad}N = J \subset \text{Rad}L$. אם כן, מעתה נניח כי $\text{Rad}L \neq 0$ ולא מכיל אידיאלים לא טריביאליים של L . כעת, $Z(L) \subset \text{Rad}L$, ולכן נוכל להניח כי $Z(L) = 0$ או $Z(L) = \text{Rad}L$.

אם $Z(L) = \text{Rad}L$, נתבונן בהצגה של $L/\text{Rad}L$ במרחב L שנתונה על ידי

$$\pi(x + \text{Rad}L) = \text{ad}_L x$$

זה מוגדר היטב שכן $\ker \text{ad}_L = Z(L) = \text{Rad}L$. האלגברה $L/\text{Rad}L$ פשוטה למחצה, ולכן π פריקה לחלוטין (ממשפט וייל), ובפרט למרחב $\text{Rad}L \subset L$ - תת מרחב אינווריאנטי להצגה π - יש משלים ישר $M \subset L$ אינווריאנטי להצגה π , כלומר $L = M \oplus \text{Rad}L$. מתקיים $\text{ad}_L x(M) \subset M$ לכל $x \in L$, ועל כן ברור כי M תת אלגברת לי של L , ולכן קיבלנו את הנדרש.

לבסוף, נותר לנו המקרה בו $Z(L) = 0$. נשים לב כי מתקיים

$$[\text{Rad}L, \text{Rad}L] \subsetneq \text{Rad}L$$

שכן $\text{Rad}L$ פתיר, ולכן נקבל כי $[\text{Rad}L, \text{Rad}L] = 0$, בגלל המקרה הראשון שהראינו. נסמן

$$T = \{x \in \text{End}_F L \mid x(L) \subset \text{Rad}L, x|_{\text{Rad}L} = \lambda(x) \cdot \text{Id}_{\text{Rad}L}\}$$

נתבונן בהצגה הבאה σ של L במרחב $\text{End}_F L$:

$$\sigma(x)(u) = [\text{ad}_L x, u]$$

נראה כעת כי T תת מרחב אינווריאנטי להצגה σ . יהיו $x \in L, u \in T$. נראה כי $\sigma(x)(u) \in T$. יהי $y \in L$:

$$\begin{aligned}\sigma(x)(u)(y) &= [\text{ad}_L x, u](y) = \text{ad}_L x(u(y)) - u(\text{ad}_L x(y)) = \\ &= [x, u(y)] - u([x, y]) \in [L, \text{Rad}L] - \text{Rad}L \subset \text{Rad}L\end{aligned}$$

נותר להראות כי $\sigma(x)(u)|_{\text{Rad}L} = \lambda \text{Id}_{\text{Rad}L}$. נניח כי $y \in \text{Rad}L$ ונמשיך:

$$\sigma(x)(u)(y) = [x, u(y)] - u([x, y]) = [x, \lambda(u)y] - \lambda(u)[x, y] = 0$$

נגדיר

$$T' = \{u \in T \mid u(\text{Rad}L) = 0\}$$

כמובן, $T' \subset T$ תת מרחב, ואפילו ברור כי $\dim T - \dim T' = 1$ (כלומר קו-מימד 1). ראינו כי $\sigma(x)(T) \subset T'$ לכל $x \in L$. נבדוק את $\sigma(\text{Rad}L)$ (על T). לשם כך, יהיו $x \in \text{Rad}L, u \in T, y \in L$:

$$\sigma(x)(u)(y) = [x, u(y)] - u([x, y])$$

כמובן $u(y) \in \text{Rad}L$, ולכן $[x, u(y)] \in [\text{Rad}L, \text{Rad}L] = 0$. כמו כן, $[x, y] \in \text{Rad}L$, ולכן נקבל

$$\sigma(x)(u)(y) = -u([x, y]) = -\lambda(u)[x, y] = -\lambda(u)\text{ad}_L x(y)$$

כלומר, כאשר $x \in \text{Rad}L$ נקבל

$$\sigma(x)(u) = -\lambda(u)\text{ad}_L x \in \text{ad}_L \text{Rad}L$$

נסמן $P = \text{ad}_L \text{Rad}L$, ונשים לב כי $P \subset T'$: בהינתן $p \in P$, ברור כי $p(L) \subset \text{Rad}L$. כי זה אידאל, וכן $[P, \text{Rad}L] = 0$. אם כן, נתבונן בהצגת המנה של $\bar{\sigma}, \sigma$ במרחב T/P . נקבל כי

$$\bar{\sigma}(L)(T/P) \subset T'$$

והרי $\sigma(\text{Rad}L) \subset P$, ולכן נקבל את ההצגה $\tilde{\sigma}$ של $L/\text{Rad}L$ במרחב T/P לפי

$$\tilde{\sigma}(x + \text{Rad}L)(u + P) = \sigma(x)(u) + P$$

ממשפט ווייל, ההצגה $\tilde{\sigma}$ פריקה לחלוטים (שכן $L/\text{Rad}L$ אלגברת לי פשוטה למחצה). כיוון שהמרחב T'/P הוא תת מרחב אינווריאנטי של ההצגה $\tilde{\sigma}$, נוכל למצוא תת מרחב $P \subset T'' \subset T$ המקיים

$$T/P = T''/P \oplus T'/P$$

ראינו כי $\dim T - \dim T' = 1$, ולכן נקבל כי $\dim T''/P = 1$. יהי $u_0 \in T'' \setminus P$. אפשר להניח כי $\lambda(u_0) = -1$ (על ידי כפל בסקלר), כלומר $(\text{Rad} L)(u_0) = -\text{Id}_{\text{Rad} L}$. אם כן,

$$\tilde{\sigma}(L)u_0 \in T''/P \cap T'/P$$

השמאלי בגלל שזה מרחב אינווריאנטי, והימני מהגדרת ההצגה. כמובן, החיתוך הזה הוא 0 - ועל כן נקבל, אם נבדוק את ההגדרות, כי

$$\sigma(x)u_0 \in P$$

לכל $x \in L$. לכן, לכל $x \in L$ יש $\psi(x) \in \text{Rad} L$ כך שמתקיים

$$\sigma(x)u_0 = \text{ad}_L \psi(x)$$

כמו כן, $\psi(x)$ יחיד בגלל ההנחה שלנו $Z(x) = 0$. נקבל העתקה לינארית

$$\psi : L \rightarrow \text{Rad} L$$

שהיא חד-חד-ערכית. כאשר $x \in \text{Rad} L$, נקבל

$$\sigma(x)u_0 = -\lambda(u_0)\text{ad}_L x = \text{ad}_L x$$

כלומר,

$$\psi(x) = x$$

כעת, נגדיר

$$M = \ker \psi$$

ואז, כמרחבים ווקטוריים נקבל

$$L = \ker \psi \oplus \text{Im} \psi = M \oplus \text{Rad} L$$

נותר רק לבדוק כי M תת אלגברת לי. נוכל לכתוב

$$\begin{aligned} M &= \{x \in L \mid \psi(x) = 0\} = \\ &= \{x \in L \mid \text{ad}_L \psi(x) = 0\} = \\ &= \{x \in L \mid \sigma(x)u_0 = 0\} \end{aligned}$$

■

וזה כבר בבירור סגור ביחס לכפל קומוטטור.

הגדרה 1.7 אלגברת לי L ממימד סופי תקרא רדוקטיבית אם $\text{Rad} L = Z(L)$.

משפט 1.8 תהי L אלגברת לי רדוקטיבית. אזי יש תת אלגברת לי $M \subset L$ פשוטה למחצה עבורה $L = M \oplus Z(L)$ (כאלגבראות לי - בבירור). כמו כן, $[L, L] = M$, וכן ההצגה ad_L היא פריקה לחלוטין.

להיפך, תהי L אלגברת לי עבורה ההצגה ad_L פריקה לחלוטין. אזי L רדוקטיבית.

הוכחה: נניח כי $\text{Rad}L = Z(L)$ ונכתוב את הפירוק כמו במשפט, $L = M \oplus Z(L)$. כעת,

$$[L, L] = [M, M] = M$$

קומוטטורים של $Z(L)$ עם הכל זה כמובן 0, וכן M פשוטה למחצה, ולכן זה נכון. M פשוטה למחצה, ולכן נוכל לכתוב אותה כך:

$$M = \bigoplus_{r=1}^k J_r$$

כאשר $J_r \subset M$ אידיאלים פשוטים. האידיאלים הללו אינווריאנטיים לקומוטטורים עם M (ובטח שגם עם $Z(L)$ - כל הקומוטטורים מתאפסים) ואם כן נקבל כי J_r הם תת מרחבים אינווריאנטיים ואי פריקים להצגה ad_L . את המרכז נפרק לתתי מרחבים מממד 1 (לפי בסיס כלשהו שנבחר). תתי מרחבים אלה וודאי אינווריאנטיים ואי פריקים גם כן. אם כן, הראינו כי ad_L פריקה לחלוטין.

בכיוון השני, נניח כי ad_L פריקה לחלוטין. לכן

$$L = \bigoplus_{j=1}^N I_j$$

כאשר $I_j \subset L$ אידיאלים שאינם 0, שלא מכילים אידיאלים חלקיים לא טריוויאליים. נניח כי $I_1, \dots, I_r$ הם כאלה עבורם

$$[I_j, I_j] \neq 0 \Rightarrow [I_j, I_j] = I_j$$

כלומר אלה לא פתירים. כל השאר מקיימים $[I_j, I_j] = 0$, כלומר בהכרח $\dim I_j = 1$. אם כן, נוכל לכתוב

$$L = \bigoplus_{j=1}^r I_j \oplus \bigoplus_{j=r+1}^N I_j$$

המחובר הימני חלקי למרכז, כמובן. נחשוב על זה כפירוק לסכום ישר של אלגבראות לי. נקבל

$$\text{Rad}L = \bigoplus_{j=1}^r \text{Rad}I_j \oplus \bigoplus_{j=r+1}^N \text{Rad}I_j$$

הרדיקלים של האידיאלים מהסוג הראשון הם תתי אידיאלים, שאינם כל האידיאל (שכן האידיאלים לא פתירים), ולכן הם 0. הרדיקלים של האידיאלים מהסוג השני הם האידיאלים עצמם, שכן הם מממד 1 (ובפרט במרכז). ובסך הכל:

$$\text{Rad}L = \bigoplus_{j=r+1}^N I_j \subset Z(L)$$

ההכלה השנייה נכונה תמיד, ובסך הכל נקבל $\text{Rad}L = Z(L)$, כלומר L רדוקטיבית. ■

דוגמאות

1. כל אלגברת לי פשוטה למחצה היא כמובן רדוקטיבית.
2. $\mathfrak{gl}_n(F)$ היא רדוקטיבית. בהינתן $x \in \mathfrak{gl}_n(F)$, נוכל לכתוב

$$x = y + \frac{\text{tr}(x)}{n} \text{Id}_n$$

נובע כי $\text{tr}(y) = 0$. אם כן, נוכל לכתוב

$$\mathfrak{gl}_n(F) = \mathfrak{sl}_n(F) \oplus \{\lambda I_n \mid \lambda \in F\} = \mathfrak{sl}_n(F) \oplus Z(\mathfrak{gl}_n(F))$$

כמובן, $\mathfrak{sl}_n(F)$ היא פשוטה למחצה, ועל כן נקבל

$$\text{Rad}(\mathfrak{gl}_n(F)) = Z(\mathfrak{gl}_n(F))$$

הגדרה 1.9 L תהי אלגברת לי ותהי $H \subset L$ תת אלגברת לי. נאמר כי H רדוקטיבית בתוך L אם ההצגה של H שמוגדרת

$$\pi(H) = \text{ad}_L H$$

במרחב L היא פריקה לחלוטין.