

אלגבראות לי

© ארזים

8 באפריל 2019

1 אלגבראות לי פשוטות למחצה

1.1 פירוק אלגברת לי פשוטה למחצה לסכום ישר של אלגבראות לי פשוטות

טענה 1.1 תהי L אלגברת לי ממימד סופי מעל F . יהי $J \subset L$ אידאל, אשר אינו מכיל אידאלים פתירים של L שאינם 0. נסמן $I = J^\perp$ - המשלים הניצב של J ביחס לתבנית κ_L . אזי $L = I \oplus J$ כאלגבראות לי.

הוכחה: כזכור,

$$I = J^\perp = \{x \in L \mid \kappa_L(x, J) = 0\}$$

וזהו אידאל של L . כמוכן מתקיים

$$\kappa_L|_{(I \cap J) \times (I \cap J)} = 0$$

ולכן, מתנאי קרטן, האידאל $I \cap J$ פתיר - ולפי ההנחה על J נקבל $I \cap J = 0$. מכאן נקבל $[J, I] \subset J \cap I = 0$, ולכן $I + J$ הוא סכום ישר (גם כאלגבראות לי). נבחר בסיס $\{u_1, \dots, u_k\}$ של J , ובסיס $\{v_1, \dots, v_n\}$ של L . אם כן, נקבל

$$I = J^\perp = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i \mid \sum_{i=1}^n x_i \kappa_L(v_i, u_j) = 0 \right\}$$

התנאי כאן הוא מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות. מתקיים

$$n = \dim L = \dim I + \text{rk} \left((\kappa_L(v_i, u_j))_{i \leq n, j \leq k} \right) \leq \dim I + k = \dim I + \dim J = \dim(I \oplus J) \leq \dim L = n$$

ולכן נקבל שתמיד יש כאן שוויון - כלומר

$$\dim(I \oplus J) = \dim L$$

■

ולכן $I \oplus J = L$.

1.2 טענה תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה ממימד סופי. יהי $J \subset L$ אידאל.

1. האידאלים $J, L/J$ הם פשוטים למחצה.

2. יהי $I = J^\perp$. אזי $L = I \oplus J$ כאלגבראות לי.

הוכחה: J לא מכיל אידאלים פתירים שאינם 0 של L , שכן L פשוטה למחצה. מהטענה הקודמת נקבל כי $L = I \oplus J$. מטענה בסוף השיעור שעבר, L פשוטה למחצה ולכן גם I, J פשוטים למחצה, והרי $I = L/J$, ולכן סיימנו. ■

משפט 1.3 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה ממימד סופי.

$$1. L = [L, L]$$

$$2. \text{Der}(L) = \text{ad}(L), \text{ כלומר כל גזירה על } L \text{ היא גזירה פנימית.}$$

הוכחה:

1. האלגברה $L/[L, L]$ היא אלגברת לי קומוטטיבית וגם פשוטה למחצה (על פי הטענה הקודמת). מזה נסיק $L/[L, L] = 0$, כלומר $L = [L, L]$.

2. נשים לב שמתקיים $L \cong \text{ad}(L)$ (שכן $Z(L) = 0$). כמובן, $\text{ad}(L) \subset \text{Der}(L)$ הוא אידאל, שכן לכל $x \in L, \delta \in \text{Der}(L)$ מתקיים

$$[\delta, \text{ad}x] = \text{ad}\delta(x)$$

כמובן, $J = \text{ad}(L)$ אינו מכיל אידאלים פתירים של $\text{Der}(L)$ שאינם 0 - כי הוא פשוט למחצה (כמו L). לפי הטענה הראשונה מהשיעור היום, יש אידאל $R \subset \text{Der}(L)$ עבורו

$$\text{Der}(L) = J \oplus R$$

נרצה להראות כי $R = 0$. ניקח $\delta \in R$. לכל $x \in L$, כמובן $\text{ad}x \in J$ ולכן $[\delta, \text{ad}x] = 0$, כלומר $\text{ad}\delta(x) = 0$. אנחנו יודעים שההעתקה $\text{ad} : L \rightarrow \text{ad}(L)$ היא איזומורפיזם, כי המרכז טריוויאלי, ולכן $\delta(x) = 0$ לכל $x \in L$ - כלומר $\delta = 0$, ובסך הכל $R = 0$. נסיק $\text{Der}(L) = J = \text{ad}(L)$. ■

משפט 1.4 תהי L אלגברת לי ממימד סופי. אזי L פשוטה למחצה אם ורק אם L מתפרקת לסכום ישר של אלגבראות לי פשוטות.

הוכחה: נניח כי L סכום ישר של אלגבראות לי פשוטות. די להראות כי אלגברת לי פשוטה היא פשוטה למחצה. תהי L אלגברת לי פשוטה (כלומר $[L, L] \neq 0$), וכן L אינה מכילה אידאלים (לא טריוויאליים). כמובן, $\text{Rad}L \subset L$ אידאל ולכן $\text{Rad}L = 0$, כלומר L פשוטה למחצה, או $\text{Rad}L = L$, ואז L פתירה, ובפרט $[L, L] \subsetneq L$, כלומר $[L, L] = 0$ בסתירה להגדרת L כפשוטה. לכן סיימנו בכיוון זה.

קעת נניח כי L פשוטה למחצה. אם L פשוטה, סיימנו. אחרת, יהי $J \subsetneq L \neq 0$ אידאל. יש אידאל I שמקיים $L = I \oplus J$, וכן I, J פשוטים למחצה. באינדוקציה על המימד, I, J מתפרקים לסכום ישר של אלגבראות לי פשוטות, ולכן סיימנו. ■

משפט 1.5 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה ממימד סופי. נפרק

$$L = \bigoplus_{i=1}^k L_i$$

כסכום ישר של אלגבראות לי פשוטות. אזי פירוק זה הוא יחיד (עד כדי סדר), וכל אידאל של K הוא מהצורה $\bigoplus L_{i_j}$, כאשר $\{i_j\} \subset \{1, \dots, k\}$.

הוכחה: יהי $J \subset L$ אידאל. לכל i , האידאל $J \cap L_i \subset L_i$ הוא אידאל של L_i , שהיא פשוטה, ולכן הוא 0 או L_i . נניח לשם פשטות כי עבור $1 \leq i \leq s$, $J \cap L_i = L_i$ וכי $J \cap L_i = 0$ עבור $s+1 \leq i \leq k$. בפרט, $L_i \subset J$ לכל $1 \leq i \leq s$, ולכן $L_1 \oplus \dots \oplus L_s \subset J$. לכל $s+1 \leq i \leq k$ מתקיים $J \cap L_i = 0$. מכאן נקבל כי

$$J \cap \left(\bigoplus_{i=s+1}^k L_i \right) \subset Z \left(\bigoplus_{i=s+1}^k L_i \right) = 0$$

כעת, אם $x \in J$, נכתוב $x = a + b$, כאשר

$$a \in \bigoplus_{i=1}^s L_i, b \in \bigoplus_{i=s+1}^k L_i$$

כמובן, $a \in J$, ומכאן נקבל גם $b \in J$, ועל כן למעשה $b = 0$. מכאן נקבל

$$J = \bigoplus_{i=1}^s L_i$$

כעת, אם

$$L = \bigoplus_{j=1}^r L'_j$$

כאשר L'_i פשוטה. יהי $1 \leq j \leq r$. כמובן, $L'_j \subset L$ אידאל פשוט. ממה שהראינו קודם הוא סכום ישר של איזשהם L_i , ולכן $L'_j = L_i$ עבור i כלשהו. כן הכיוון השני נכון, ולכן

$$\{L_i\}_{i=1}^k = \{L'_j\}_{j=1}^r$$

■

1.2 פריקות לחלוטין של הצגות של אלגבראות לי פשוטות למחצה

משפט 1.6 תהי π הצגה נאמנה (חד-חד-ערכית) ממימד סופי של אלגברת לי פשוטה למחצה L ממימד סופי. תהי b_π התבנית המתאימה להצגה π .

1. b_π לא מנוונת.

2. יהי $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ בסיס של L , ויהי $\hat{B} = \{y_1, \dots, y_n\}$ הבסיס של L שדואלי לבסיס B ביחס לתבנית b_π . נתבונן באופרטור

$$c_{\pi, B} = \sum_{i=1}^n \pi(x_i) \pi(y_i)$$

אזי $c_{\pi, B}$ מתחלף עם $\pi(x)$ לכל $x \in L$.

3. נניח כי π אי פריקה וגם כי F סגור אלגברית. אזי $c_{\pi, B}$ אינו תלוי בבחירת B ומתקיים

$$c_{\pi, B} = \frac{\dim L}{\dim V_\pi} I_{V_\pi}$$

ומסמנים $c_\pi = c_{\pi, B}$ (אופרטור קזימיר של ההצגה).

הוכחה:

1. נסמן

$$J = \{x \in L \mid b_\pi(x, L) = 0\}$$

זה הרדיקל של התבנית, שמוגדרת על ידי

$$b_\pi(x, y) = \text{tr}(\pi(x) \pi(y))$$

כמובן, $J \subset L$ אידאל, ומתקיים

$$\text{tr}(\pi(x) \pi(y)) = 0$$

לכל $x \in J$ ולכל $y \in L$ (ובפרט לכל $y \in J$). לפי משפט קודם שהוכחנו, נובע כי $\pi(J)$ תת אלגברת לי פתירה של $\text{gl}(V_\pi)$. כמובן $L \cong \pi(L)$, כי π חד־חד־ערכית, ולכן $J \subset L$ אידאל פתיר - כלומר $J = 0$.

2. ניזכר בהגדרת הבסיס הדואלי $\hat{B}$ - מתקיים

$$b_\pi(x_i, y_j) = \delta_{i,j}$$

לכל i, j . כעת,

$$\begin{aligned} [c_{\pi, B}, \pi(x)] &= \sum_{i=1}^n (\pi(x_i) \pi(y_i) \pi(x) - \pi(x) \pi(x_i) \pi(y_i)) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\pi(x_i) \pi(y_i) \pi(x) - (\pi[x, x_i] \pi(y_i) + \pi(x_i) \pi(x) \pi(y_i))) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\pi(x_i) \pi[y_i, x] - \pi[x, x_i] \pi(y_i)) = \\ &= - \sum_{i=1}^n (\pi(x_i) \pi[x, y_i] + \pi[x, x_i] \pi(y_i)) \end{aligned}$$

כעת נוכל לכתוב

$$\begin{aligned}[x, x_i] &= \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \\ [x, y_i] &= \sum_{j=1}^n b_{i,j} y_j\end{aligned}$$

מתקיים:

$$\begin{aligned}a_{i,j} &= b_\pi([x, x_i], y_j) = -b_\pi([x_i, x], y_j) = -b_\pi(x_i, [x, y_j]) = \\ &= -b_\pi\left(x_i, \sum_{l=1}^n b_{j,l} y_l\right) = -b_{j,i}\end{aligned}$$

כעת נציב כל זאת בחזרה ונקבל

$$\begin{aligned}[c_{\pi,B}, \pi(x)] &= -\sum_{i=1}^n (\pi(x_i) \pi[x, y_i] + \pi[x, x_i] \pi(y_i)) = \\ &= -\sum_{i=1}^n \pi(x_i) \sum_{j=1}^n b_{i,j} \pi(y_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \pi(x_j) \pi(y_i) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{j,i} \pi(x_i) \pi(y_j) - \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \pi(x_j) \pi(y_i) = 0\end{aligned}$$

3. מהלמה של שור נקבל כי $c_{\pi,B}$ הוא אופרטור סקלרי (כי הוא במרכז). כעת,

$$\begin{aligned}c_{\pi,B} &= \lambda I_{V_\pi} \\ \text{tr}(c_{\pi,B}) &= \lambda \dim V_\pi \\ \text{tr}(c_{\pi,B}) &= \sum_{i=1}^n b_\pi(x_i, y_i) = n\end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{n}{\dim V_\pi} \text{ כלומר}$$

■

דוגמא ההצגה של $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ במרחב $\mathbb{C}^n$. לכל $x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ נקבל

$$\pi(x)v = x \cdot v$$

זו הצגה אי פריקה. כעת,

$$\begin{aligned}b_\pi(x, y) &= \text{tr}(xy) \\ c_\pi &= \frac{n^2 - 1}{n} I_{\mathbb{C}^n}\end{aligned}$$

משפט 1.7 תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה ממימד סופי. תהי π הצגה ממימד סופי של L .
תהי $f : L \rightarrow V$ העתקה לינארית מעל F . התכונות הבאות שקולות:

1. לכל $x, y \in L$ מתקיים

$$f[x, y] = \pi(x) f(y) - \pi(y) f(x)$$

2. קיים $v \in V$ עבורו

$$f(x) = \pi(x) v$$

הוכחה: בכיוון $1 \Rightarrow 2$ קל לבדוק שזה מתקיים:

$$\begin{aligned} f[x, y] &= \pi[x, y] v = \pi(x) (\pi(y) v) - \pi(y) (\pi(x) v) = \\ &= \pi(x) f(y) - \pi(y) f(x) \end{aligned}$$

כמו שרצינו. בכיוון השני, נתחיל ברדוקציה לשדה סגור אלגברית. יהי $\overline{F}$ הסגור האלגברי של F , ונתבונן במרחב הרחבת הסקלרים

$$\begin{aligned} V_{\overline{F}} &= V \otimes_F \overline{F} \\ L_{\overline{F}} &= L \otimes_F \overline{F} \\ \pi_{\overline{F}}(x \otimes \lambda) &= \pi(x) \otimes \lambda \\ f_{\overline{F}} : L_{\overline{F}} &\rightarrow V_{\overline{F}} \\ f_{\overline{F}}(x \otimes \lambda) &= f(x) \otimes \lambda \end{aligned}$$

כעת,

$$\begin{aligned} f_{\overline{F}}[x \otimes \lambda, y \otimes \mu] &= f_{\overline{F}}([x, y] \otimes \lambda \mu) = f[x, y] \otimes \lambda \mu = \\ &= (\pi(x) f(y) - \pi(y) f(x)) \otimes \lambda \mu = \\ &= (\pi(x) \otimes \lambda) (f(y) \otimes \mu) - (\pi(y) \otimes \mu) (f(x) \otimes \lambda) = \\ &= \pi_{\overline{F}}(x \otimes \lambda) f_{\overline{F}}(y \otimes \mu) - \pi_{\overline{F}}(y \otimes \mu) f_{\overline{F}}(x \otimes \lambda) \end{aligned}$$

ולכן, אם הוכחנו את הטענה מעל $\overline{F}$, אז יש $v_{\overline{F}} \in V_{\overline{F}}$ כך שלכל $x \in L$ מתקיים

$$f_{\overline{F}}(x \otimes 1) = \pi_{\overline{F}}(x \otimes 1) (v_{\overline{F}})$$

כלומר

$$f(x) \otimes 1 = (\pi(x) \otimes 1) (v_{\overline{F}})$$

נבחר בסיס $\{\mu_j\}_{j \in I}$ של $\overline{F}$ מעל F . כך שמתקיים $\mu_{j_0} = 1$ עבור j_0 כלשהו. נכתוב

$$v_{\overline{F}} = \sum_{j \in I} v_j \otimes \mu_j$$

עבור $v_j \in V$ מכאן

$$f(x) \otimes 1 = \sum_{j \in I} \pi(x) v_j \otimes \mu_j$$

ולכן

$$f(x) = \pi(x) v_{j_0}$$

כל שנותר לנו הוא להוכיח עבור המקרה בו F סגור אלגברית. ראשית, נניח כי π אי פריקה ונאמנה. ראינו כי b_π לא מנוונת. נבחר בסיס $\{x_1, \dots, x_n\}$ של L וניקח את הבסיס הדואלי לו $\{y_1, \dots, y_n\}$ ביחס לתבנית b_π . יהי

$$\lambda = \frac{\dim L}{\dim V}$$

הסקלר של אופרטור קזימיר. נגדיר את הווקטור

$$v = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \pi(x_i) f(y_i)$$

ונראה כי

$$f(x) = \pi(x) v$$

נתבונן בהפרש

$$\lambda(\pi(x) v - f(x)) = \sum_{i=1}^n \pi(x) \pi(x_i) f(y_i) - \lambda f(x)$$

ראינו כי

$$\sum_{i=1}^n \pi(x_i) \pi(y_i) = c_\pi = \lambda I_{V_\pi}$$

כלומר נקבל (הסימונים $a_{i,j}, b_{i,j}$ זהים לאלה שהשתמשנו בהם בטענה על אופרטור קזימיר):

$$\begin{aligned} \lambda(\pi(x) v - f(x)) &= \sum_{i=1}^n \pi(x) \pi(x_i) f(y_i) - \lambda f(x) = \\ &= \sum_{i=1}^n \pi(x) \pi(x_i) f(y_i) - \sum_{i=1}^n \pi(x_i) \pi(y_i) f(x) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\pi[x, x_i] f(y_i) + \pi(x_i) \pi(x) f(y_i) - \pi(x_i) \pi(y_i) f(x)) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\pi[x, x_i] f(y_i) + \pi(x_i) (\pi(x) f(y_i) - \pi(y_i) f(x))) = \\ &= \sum_{i=1}^n \pi[x, x_i] f(y_i) + \sum_{i=1}^n \pi(x_i) f[x, y_i] = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \pi(x_j) f(y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i} \pi(x_i) f(y_j) = 0 \end{aligned}$$

כמוכך, $\lambda \neq 0$, ולכן נקבל כי $\pi(x)v = f(x)$. כעת, נוותר על הנחת הנאמנות - כלומר π אי-פריקה. נסמן $J = \ker \pi$. זהו אידאל של L , ולכן יש לו משלים ישר, $L = I \oplus J$. הצמצום $\pi|_I$ היא אי פריקה ונאמנה של I במרחב V . נראה כי $f(J) = 0$. יהיו $x, y \in J$, אזי

$$f[x, y] = \pi(x)f(y) - \pi(y)f(x) = 0 - 0 = 0$$

אם כן, $f[J, J] = 0$. פשוט למחצה, ולכן $J = [J, J]$, כלומר $f(J) = 0$. ממה שראינו עכשיו, נקבל שקיים $v \in V$ עבורו $f(x) = \pi(x)v$ לכל $x \in I$. יהי $x \in L$. נכתוב $x = a + b$, $a \in I, b \in J$ נקבל

$$f(x) = f(a) = \pi(a)v = \pi(a+b)v = \pi(x)v$$

לבסוף, נוותר גם על הנחת האי פריקות - כלומר π הצגה פריקה. ניקח $W \subsetneq V$, $0 \neq W$ תת מרחב אינווריאנטי. נתבונן בהצגת המנה $\bar{\pi}$ של L במרחב L/W . נסמן $\varphi : V \rightarrow V/W$ את העתקת המנה הקונונית, ונגדיר

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \varphi \circ f \\ \bar{f}(x) &= f(x) + W\end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned}\bar{f}[x, y] &= f[x, y] + W = \pi(x)f(y) - \pi(y)f(x) + W \\ &= \bar{\pi}(x)(f(y) + W) - \bar{\pi}(y)(f(x) + W) = \\ &= \bar{\pi}(x)\bar{f}(y) - \bar{\pi}(y)\bar{f}(x)\end{aligned}$$

באינדוקציה על המימד, יש ווקטור $v \in V$ עבורו $\bar{f}(x) = \bar{\pi}(x)(v + W)$ לכל $x \in L$. נסמן כעת

$$f'(x) = f(x) - \pi(x)v \in W$$

עבור $x \in L$. כעת,

$$\begin{aligned}f'[x, y] &= f[x, y] - \pi[x, y]v = \\ &= \pi(x)f(y) - \pi(y)f(x) - \pi(x)\pi(y)v + \pi(y)\pi(x)v = \\ &= \pi(x)(f(y) - \pi(y)v) - \pi(y)(f(x) - \pi(x)v) = \\ &= \pi(x)f'(y) - \pi(y)f'(x)\end{aligned}$$

לכן f' מקיימת את התכונה הנדרשת כלפי ההצגה $\pi|_W$ (שכן $f' : L \rightarrow W$), ולכן בשוויון האחרון נוכל להחליף את π עם הצמצום $\pi|_W$. אם כן, באינדוקציה על המימד, נקבל ווקטור $w \in W$ עבורו

$$f'(x) = \pi(x)w$$

נקבל

$$\begin{aligned}f(x) - \pi(x)v &= \pi(x)w \\ f(x) &= \pi(x)(v + w)\end{aligned}$$

■

ולכן הווקטור $v + w$ מוכיח את המשפט שלנו.

משפט 1.8 (וייל Weyl) תהי L אלגברת לי פשוטה למחצה מממד סופי. אז כל הצגה מממד סופי של L היא פריקה לחלוטין.

הוכחה: תהי π הצגה של L במרחב V (מממד סופי מעל F). יהי $U \subset V$ תת מרחב אינווריאנטי, נוכיח כי יש לו משלים ישר אינווריאנטי. יהי $\varphi : V \rightarrow V/U$ הומומורפיזם המנה. נראה שיש $\xi : V/U \rightarrow V$ הומומורפיזם של מודולים מעל L עבורו

$$\varphi \circ \xi = \text{id}_{V/U}$$

לאחר מכן נסמן $W = \xi(V/U)$ - נקבל $U \cap W = 0$, כי אם $u \in U \cap W$ אזי $u = \xi(v + U)$, $u = \xi(v + U) = v + U$ ולכן $0 = \varphi(u) = v + U$ כלומר $v \in U$, לכן $u = \xi(v + U) = 0$. לכן $U + W$ סכום ישר, וכן

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W = \dim U + \dim V/U = \dim V$$

כאשר השתמשנו במעבר הלפני אחרון בכך שבהכרח ξ חד-חד-ערכית. אם כן, נותר לנו למצוא את ξ . ניזכר במרחב

$$\mathcal{V} = \text{Hom}_F(V/U, V)$$

ראינו כי על $\mathcal{V}$ יש מבנה של מודול מעל L לפי ההצגה

$$\lambda(x)(T)(\bar{v}) = \pi(x)(T(\bar{v})) - T(\pi(x)(\bar{v}))$$

תהי $T_0 \in \mathcal{V}$ העתקה לינארית עבורה $\varphi \circ T_0 = \text{id}_{V/U}$. נגדיר כעת

$$f(x) = \lambda(x)(T_0)$$

כמובן $f : L \rightarrow \mathcal{V}$ העתקה לינארית. נראה כי לכל $x \in L$ מתקיים $\varphi \circ f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \varphi(f(x)(\bar{v})) &= \varphi(\lambda(x)(T_0)(\bar{v})) = \\ &= \varphi(\pi(x)(T_0(\bar{v})) - T_0(\pi(x)(\bar{v}))) = \\ &= \pi(x)(\varphi(T_0(\bar{v}))) - \varphi(T_0(\pi(x)(\bar{v}))) = \\ &= \pi(x)(\bar{v}) - \pi(x)(\bar{v}) = 0 \end{aligned}$$

נסמן כעת $\mathcal{V}' = \text{Hom}_F(V/U, U)$. הראינו כי $f(x) \in \mathcal{V}'$ לכל $x \in L$. כעת, $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ הוא תת מרחב אינווריאנטי להצגה λ . נסמן f' את ההעתקה הלינארית

$$\begin{aligned} f' : L &\rightarrow \mathcal{V}' \\ f'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

לכל $x \in L$, כעת, f' מקיימת את התכונה בסעיף 1 במשפט הקודם ביחס להצגה $\mu(x) = \lambda(x)|_{\mathcal{V}'}$

$$\begin{aligned} f'[x, y] &= \mu[x, y](T_0) = \lambda[x, y]T_0 = \\ &= \lambda(x)\lambda(y)T_0 - \lambda(y)\lambda(x)T_0 = \\ &= \mu(x)f'(y) - \mu(y)f'(x) \end{aligned}$$

מהמשפט הקודם, ישנו $T'_0 \in \mathcal{V}'$ עבורו

$$f'(x) = \mu(x)T'_0$$

לכל $x \in L$. נחשוב על T'_0 כהעתקה לינארית לתוך V (במקום לתוך U - זה מרחב גדול יותר אז זה לא משנה), וא

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) - f(x) = f(x) - f'(x) = \lambda(x)(T_0) - \mu(x)(T'_0) = \\ &= \lambda(x)(T_0) - \lambda(x)(T'_0) = \lambda(x)(T_0 - T'_0) \end{aligned}$$

נסמן $\xi = T_0 - T'_0$. כעת,

$$\begin{aligned} \xi : V/U &\rightarrow V \\ \lambda(x)(\xi) &= 0 \end{aligned}$$

כעת,

$$0 = \lambda(x)(\xi)(\bar{v}) = \pi(x)(\xi(\bar{v})) - \xi(\pi(x)\bar{v})$$

כלומר נקבל

$$\pi(x)(\xi(\bar{v})) = \xi(\pi(x)\bar{v})$$

ולכן $\xi : V/U \rightarrow V$ הומומורפיזם של מודולים מעל L . נקבל לבסוף

$$\varphi \circ \xi = \varphi \circ T_0 - \varphi \circ T'_0 = \varphi \circ T_0 = \text{id}_{V/U}$$

■

כאשר בדרך איפסנו את $\varphi \circ T'_0$ שכן $\text{Im } T'_0 \subset U$.

1.3 פירוק ז'ורדן-שבליי (Jordan-Chevalley) באלגבראות לי פשוטות למחצה.

יהי V מרחב ווקטורי ממימד סופי מעל F , ויהי $x \in \text{End}_F V$. יהי $m_x(t) \in F[t]$ הפולינום המינימלי של x . יהי K שדה פיצול של $m_x(t)$. אפשר לכתוב את פירוק ז'ורדן של x מעל K .

$$V_K = V \otimes_F K$$

$$L_K = L \otimes_F K$$

$$\text{End}_K V_K = \text{End}_F V \otimes K \cong K^{\dim_F V}$$

כאשר $x \otimes \lambda$ זו העתקה לינארית $V_K \rightarrow V_K$ מעל K הממפה

$$v \otimes \mu \mapsto x(v) \otimes \lambda \mu$$

אם B בסיס של V מעל F , אזי $B \otimes 1$ בסיס של V_K מעל K . כעת,

$$[x \otimes \lambda]_{B \otimes 1} = \lambda [x]_B$$

$$[v \otimes \lambda]_{B \otimes 1} = \lambda [v]_B$$

אם כן, יש משמעות לפירוק

$$x \otimes 1 = x'_s + x'_n$$

שהוא פירוק ז'ורדן של x מעל K - שני המחוברים איברים של $\text{End}_K V_K$. ניקח אוטומורפיזם ונקבל, $\sigma \in \text{Gal}(K/F)$

$$x \otimes 1 = \sigma(x \otimes 1) = \sigma(x'_s) + \sigma(x'_n)$$

נקבל כאן פירוק ז'ורדן נוסף של $x \otimes 1$. מהיחידות של פירוק ז'ורדן נסיק

$$\begin{aligned}\sigma(x'_s) &= x'_s \\ \sigma(x'_n) &= x'_n\end{aligned}$$

אם כן, כל הקואורדינטות של המחוברים בשדה השבת של חבורת גלואה - כלומר בתוך F . אם כן, נכתוב

$$\begin{aligned}x'_s &= x_s \otimes 1 \\ x'_n &= x_n \otimes 1\end{aligned}$$

ונקבל

$$x = x_s + x_n$$

פירוק "ז'ורדן" - x_s ניתן ללכסון מעל K , ולא מעל F . זה ייקרא פירוק ז'ורדן-שבליי. הוא יחיד, ואפילו ניתן לכתוב את המחוברים כפולינומים של x - אבל עם מקדמים בשדה K .