

אלגבראות לי

© ארזים

29 באפריל 2019

1 נילפוטנטיות ופתירות באלגבראות לי

ניזכר במשפט שראינו בפעם הקודמת ועוד לא הוכחנו:

משפט 1.1 יהי V מרחב ווקטורי ממימד סופי מעל שדה F (שהמציין שלו 0). תהי $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ תת אלגברת לי. נניח כי $\text{tr}(xy) = 0$ לכל $x, y \in L$. אזי כל איברי $[L, L]$ הם נילפוטנטיים (כהעתקות לינאריות).

הוכחה: ראשית נניח כי F סגור אלגברית. יהי $x \in [L, L]$, ונכתוב

$$x = \sum_{i=1}^k [a_i, b_i]$$

כאשר $a_i, b_i \in L$. נכתוב את פירוק ז'ורדן של x כהעתקה לינארית (שהרי השדה סגור אלגברית) - $x = x_s + x_n$. האופרטור x_s ניתן ללכסון, אז נבחר בסיס B של V שמורכב מווקטורים עצמיים של x_s - כלומר

$$[x_s]_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

מטרתנו היא להראות כי $x_s = 0$. לשם כך, נראה כי $\lambda_i = 0$ לכל i . נגדיר את המרחב הבא:

$$E = \text{Span}_{\mathbb{Q}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

נתבונן במרחב הדואלי $E^* = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{Q})$ שכן אז נקבל $E = 0$, כלומר $\lambda_i = 0$ לכל i . יהי $f \in E^*$. יש $y_f \in \mathfrak{gl}(V)$ (יחידה) המקיימת

$$[y_f]_B = \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$$

כעת, y_f הוא פולינום במטריצה x_s , כי נמצא פולינומים $p(t) \in F[t]$ עבורו $p(\lambda_i) = f(\lambda_i)$, ואז

$$[p(x_s)]_B = \text{diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)) = [y_f]_B$$

ולכן $y_f = p(x_s)$.

$$y_f x_n = p(x_s) x_n = x_n p(x_s) = x_n y_f$$

נסיק כי $y_f x_n$ נילפוטנטית ולכן $\text{tr}(y_f x_n) = 0$. כעת,

$$\begin{aligned}\text{tr}(y_f x) &= \text{tr}(y_f x_s) + \text{tr}(y_f x_n) = \text{tr}(y_f x_s) = \text{tr}([y_f]_B [x_s]_B) = \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i f(\lambda_i)\end{aligned}$$

כמו כן, נקבל

$$\begin{aligned}\text{tr}(y_f, x) &= \sum_{i=1}^k \text{tr}(y_f, [a_i, b_i]) = \\ &= \sum_{i=1}^k \text{tr}([y, a_i] \cdot b_i) = \sum_{i=1}^k \text{tr}(\text{ad}_{y_f}(a_i) b_i)\end{aligned}$$

נראה כעת כי ad_{y_f} פולינום בערך ad_x . לשם כך - נעבור לקורדינטות במרחב V לפי הבסיס B , והתאם נעבור לקואורדינטות במרחב $\text{gl}(V)$ באמצעות $[\cdot]_B$. כעת,

$$\begin{aligned}\text{ad}[y_f]_B e_{i,j} &= (f(\lambda_i) - f(\lambda_j)) e_{i,j} = f(\lambda_i - \lambda_j) e_{i,j} \\ \text{ad}[x_s]_B e_{i,j} &= (\lambda_i - \lambda_j) e_{i,j}\end{aligned}$$

נמצא כעת פולינום $\tilde{p}(t) \in F[t]$ עבורו

$$\tilde{p}(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i - \lambda_j)$$

ואז ינבע כי מתקיים

$$\tilde{p}(\text{ad}_x) = \text{ad}_{y_f}$$

כזכור, $\text{ad}_x = \text{ad}_x + \text{ad}_n$ הוא פירוק ז'ורדן של ad_x . כמו כן, אנו יודעים כי ad_x פולינום בערך ad_x . מכאן, ad_{y_f} פולינום בערך ad_x . נסיק כי

$$[y_f, a_i] = \text{ad}_{y_f}(a_i) \in L$$

כאשר

$$\text{ad}_{y_f} = \sum_{j=0}^R \alpha_j \text{ad}^j x$$

מכאן, לפי ההנחה במשפט, נקבל

$$\text{tr}([y_f, a_i] \cdot b_i) = 0$$

ועל כן לכל $f \in E^*$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(\lambda_i) = 0$$

נפעיל שוב את f ונקבל

$$\sum_{i=1}^n (f(\lambda_i))^2 = 0$$

והרי $f(\lambda_i) \in \mathbb{Q}$, לכן נובע כי $f(\lambda_i) = 0$ לכל $f \in E^*$. זה מראה $E^* = 0$ ולכן $E = 0$, כלומר $x = x_n$ ואז $x_s = 0$ נילפוטנטי.

לשדה כללי F ניקח הרחבות סקלרים לסגור האלגברי $\bar{F}$:

$$\bar{L} = L \otimes_F \bar{F}$$

$$\bar{V} = V \otimes_F \bar{F}$$

ניזכר שאם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V מעל F אזי $\{v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1\}$ בסיס של $\bar{V}$ מעל $\bar{F}$. יש לנו גם איזומורפיזם מאוד ברור:

$$\text{gl}(V) \otimes_F \bar{F} \cong \text{gl}(\bar{V})$$

שמתאים כך:

$$\begin{aligned} (a_{i,j})_{i,j=1}^n \otimes \bar{F} &\ni \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^{(k)} e_{i,j} \otimes t_k \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n e_{i,j} \otimes \sum_{k=1}^r a_{i,j}^{(k)} t_k = \\ &= \sum_{i,j=1}^n e_{i,j} \otimes \alpha_{i,j} \end{aligned}$$

ולכן נוכל לחשב עקבות בשני הצדדים ולקבל דברים נכונים -

$$\text{tr}((x \otimes t)(y \otimes t')) = tt' \text{tr}(x, y) = 0$$

כאשר העקבה האחרונה שווה 0 בגלל ההנחה במשפט. כעת, $\bar{L} \subset \text{gl}(\bar{V})$, וראינו כי $\text{tr}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ לכל $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{L}$ - כלומר, ממה שראינו לשדה סגור אלגברית, איברי $[\bar{L}, \bar{L}]$ נילפוטנטיים - והרי

$$[L, L] \otimes 1 \subset [\bar{L}, \bar{L}]$$

■

ולכן גם איברי $[L, L]$ נילפוטנטיים, וסיימנו.

מסקנה 1.2 בתנאי המשפט שהוכחנו, $[L, L]$ נילפוטנטי (כאלגברת לי), ולכן L פתירה.

הוכחה: ראינו עכשיו שכל איברי $[L, L]$ נילפוטנטיים. נתבונן בהצגה $\pi = \text{id}$ של $[L, L]$ במרחב V . נקבל שלכל $x \in [L, L]$, האיבר $\pi(x)$ נילפוטנטי, ולכן נקבל כי $[L, L]$ אלגברת לי נילפוטנטית לפי משפט שראינו בשבוע שעבר (ואפילו קיים בסיס של V שישלש את $\pi([L, L])$ סימולטנית).
■

מסקנה 1.3 תהי L אלגברת לי ממימד סופי מעל שדה F . נניח לכל $x, y \in [L, L]$ מתקיים $\kappa_L(x, y) = 0$. אזי L פתירה.

הוכחה: נתון לנו כי לכל $x, y \in [L, L]$ מתקיים

$$\kappa_L(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_L x, \text{ad}_L y) = 0$$

נשתמש במשפט הקודם כאשר $V = L$, ותת אלגברת לי של $\text{gl}(V)$ שניקח היא $\text{ad}[L, L]$. מהמשפט, נקבל שהאלגברה $\text{ad}_L([L^{(1)}, L^{(1)}]) = \text{ad}_L(L^{(2)})$ נילפוטנטית. בפרט, $\text{ad}_{L^{(2)}}(L^{(2)})$ נילפוטנטי - וממשפט אנגל נקבל כי $L^{(2)}$ נילפוטנטית, ולכן פתירה - ולכן כמובן שגם L פתירה (שכן $(L^{(2)})^{(k)} = L^{(2+k)}$). ■

בסיכום מה שעשינו היום עם מעט שעשינו בפעם הקודמת נקבל:

משפט 1.4 (קרטן Cartan) תהי L אלגברת לי ממימד סופי. אזי L פתירה אם ורק אם תבנית קילינג של L היא זהותית אפס על $[L, L] \times [L, L]$.

2 אלגבראות לי פשוטות למחצה

2.1 האידאל הנילפוטנטי הגדול ביותר

טענה 2.1 תהי π הצגה אי פריקה ממימד סופי של אלגברת לי L במרחב V . יהי $J \subset L$ אידאל כך שכל איברי $\pi(J)$ נילפוטנטים. אזי $\pi(J) = 0$, כלומר $J \subset \ker \pi$.

הוכחה: אם $J = 0$ אין מה להוכיח. אחרת, נתבונן בתת המרחב

$$W = \{v \in V \mid \pi(J)v = 0\}$$

נטען שמתקיים $W \neq 0$. אם נתבונן בהצגה $\pi|_J$ של J במרחב V , נקבל שלכל $x \in J$ האיבר $\pi'(x)$ נילפוטנטי - לכן לפי משפט שהוכחנו בשבוע שעבר נקבל שילוש סימולטני של $\pi'(J)$ למטריצות נילפוטנטיות - בפרט יש ווקטור עצמי משותף לכל $\pi(J)$ עם ערך עצמי 0, ולכן $W \neq 0$. כמובן, המרחב $W \subset V$ הוא תת מרחב אינווריאנטי (גם את זה ראינו - שהרי $W = V_\lambda$ עבור הפונקציונל $0 : v \mapsto 0$). הנחנו כי π אי פריקה, ולכן נקבל $W = V$ - כלומר $\pi(J) = 0$. ■

טענה 2.2 תהי π הצגה ממימד סופי של אלגברת לי L במרחב V . נתבונן במרחב V כמודול מעל L , וניקח לו סדרת הרכב:

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_n = 0$$

יהי $J \subset L$ אידאל. התנאים הבאים שקולים:

1. לכל $x \in J$ האופרטור $\pi(x)$ נילפוטנטי.

2. לכל i מתקיים $\pi(J)V_i \subset V_{i+1}$.

הוכחה: נסמן π_i את ההצגה של L במרחב המנה V_i/V_{i+1} . אלה הצגות אי פריקות. נניח את התנאי הראשון. ברור שלכל $x \in J$ ולכל i נקבל שהאופרטור $\pi_i(x)$ נילפוטנטי על המנה V_i/V_{i+1} - ומכאן נקבל שלמעשה $\pi_i(x) = 0$ - שזה בדיוק אומר שמתקיים $\pi(x) V_i \subset V_{i+1}$.
 כעת נניח את התנאי השני. יהי $x \in J$. נקבל כי

$$\pi(x)^n V = \pi(x) V_0 \subset \pi(x)^{n-1} V_1 \subset \dots \subset \pi(x) V_n = 0$$

■

טענה 2.3 תהי π הצגה ממימד סופי של L במרחב V .

1. מבין כל האידאלים $J \subset L$ עבורם כל איברי $\pi(J)$ נילפוטנטיים, קיים אידאל אחד, שיסומן n_π , שמכיל את כל האחרים.

2. תהי $V = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_n = 0$ סדרת הרכב, ונגדיר שוב π_i ההצגה של L במרחב V_i/V_{i+1} . אזי

$$n_\pi = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker \pi_i$$

3. האידאל n_π "מאונך" לכל L ביחס לתבנית b_π , שמוגדרת על ידי

$$b_\pi(x, y) = \text{tr}(\pi(x) \pi(y))$$

כלומר

$$b_\pi(n_\pi, L) = 0$$

הוכחה: נשתמש בסדרת ההרכב מהסעיף השני. יהי J אידאל שעבורו כי איברי $\pi(J)$ נילפוטנטיים. בטענה הקודמת ראינו שמתקיים $\pi_i(J) = 0$ לכל i - ולכן $J \subset n_\pi$ לכל i . מכאן,

$$J \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker \pi_i$$

נסמן את החיתוך הזה n_π . זהו כמובן אידאל, בתור חיתוך של אידאלים. ברור כי לכל $x \in n_\pi$ מתקיים $\pi(x) V_i \subset V_{i+1}$ לכל i - ולכן מהטענה הקודמת נקבל שלכל $x \in n_\pi$ האופרטור $\pi(x)$ נילפוטנטי. מכאן נקבל את שני הסעיפים הראשונים של הטענה. נותרנו עם הסעיף האחרון - נרצה להראות שלכל $x \in n_\pi$ ולכל $y \in L$ מתקיים

$$\text{tr}(\pi(y) \pi(x)) = 0$$

ולשם כך נראה שהאופרטור $\pi(y) \pi(x)$ הוא נילפוטנטי. לכל $x \in n_\pi$ האופרטור $\pi(x)$ נילפוטנטי, ולכן קיים בסיס B של V כך שלכל $x \in n_\pi$ מתקיים

$$[\pi(x)]_B \in n(k, F)$$

כאשר $k = \dim_F V$. כעת,

$$\begin{aligned} (\pi(y)\pi(x))^2 &= \pi(y)\pi(x)\pi(y)\pi(x) = \pi(y)(\pi(y)\pi(x) + \pi([y, x]))\pi(x) = \\ &= \pi(y)^2\pi(x)^2 + \pi(y)\pi([y, x])\pi(x) \end{aligned}$$

באינדוקציה (פעמיים) מוכיחים כי

$$(\pi(y)\pi(x))^k = \sum \pi(y)^i \pi(x_1) \cdots \pi(x_k)$$

כאשר זהו סכום סופי, $0 \leq i \leq k$, וכן $x_1, \dots, x_k \in n_\pi$. כעת,

$$[\pi(y)\pi(x)]_B^k = \sum [\pi(y)]_B^i [\pi(x_1)]_B \cdots [\pi(x_k)]_B$$

יש כאן מכפלה של k מטריצות משולשיות עליונות ונילפוטנטיות בגודל $k \times k$ - שהיא בהכרח 0, ולכן האופרטור $\pi(y)\pi(x)$ נילפוטנטי, ובפרט $\text{tr}(\pi(y)\pi(x)) = 0$. ■

הגדרה 2.4 האידאל n_π נקרא האידאל הנילפוטנטי הגדול ביותר שמתאים להצגה π .

משפט 2.5 תהי L אלגברת לי ממימד סופי. אזי יש לאלגברה L אידאל נילפוטנטי n_L שמכיל כל אידאל נילפוטנטי של L . האידאל הזה מאונך לכל L ביחס לתבנית קילינג:

$$\kappa_L(n_L, L) = 0$$

הוכחה: נציב בטענה הקודמת $\pi = \text{ad}_L$ עם המרחב $V = L$. נקבל $n_L = n_{\text{ad}}$ שהוא אידאל של L . לכל $x \in n_L$ האופרטור $\text{ad}_L x$ הוא נילפוטנטי על L , ובפרט $\text{ad}_{n_L} x$ נילפוטנטי. ממשפט אנגל נקבל שהאידאל n_L נילפוטנטי כאלגברת לי - ולכן הוא אידאל נילפוטנטי. יהי $J \subset L$ אידאל נילפוטנטי. נניח כי

$$J_k = 0$$

כיוון שמתקיים $[J, L] \subset J$, נקבל שקומוטטורים באורך k שכל האיברים בהם מתוך J פרט לאחרון, שמתוך L , מתאפסים גם כן. לכן $\text{ad}_L x = 0$ לכל $x \in J$, ולכן $J \subset n_L$. ■

2.2 אפיון פשטות למחצה באמצעות תבנית קילינג

למה 2.6 תהי L אלגברת לי ממימד סופי ויהי $J \subset L$ אידאל. אזי $\kappa_L|_{J \times J}$ היא תבנית קילינג של J (כאלגברת לי).

הוכחה: לכל $x, y \in J$ נקבל כי

$$\begin{aligned} \text{ad}_L x(L) &\subset L \\ \text{ad}_L y(L) &\subset L \end{aligned}$$

לכן,

$$\kappa_L(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_L x \text{ad}_L y) = \text{tr}(\text{ad}_L x|_J \text{ad}_L y|_J) = \text{tr}(\text{ad}_J x \text{ad}_J y) = \kappa_J(x, y)$$

ולכן סיימנו. ■

משפט 2.7 תהי L אלגברת לי ממימד סופי. התנאים הבאים שקולים:

1. $\text{Rad} L = 0$ (כלומר L פשוטה למחצה).
2. אין בתוך L אידאלים קומוטטיביים שאינם 0.
3. תבנית קילינג של L אינה מנוונת - כלומר לכל $y \in L$ מתקיים $\kappa_L(x, y) = 0$ אם ורק אם $x = 0$.

הוכחה: $3 \Rightarrow 1$: נסמן

$$J = \{x \in L \mid \kappa(x, L) = 0\}$$

זהו אידאל - נניח כי $x \in J$, ויהי $y \in L$, אזי לכל $x \in L$ נקבל

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]) = 0$$

ולכן זהו אכן אידאל. מהגדרת J נקבל כי $\kappa|_{J \times J} = 0$, ומהלמה נקבל כי $\kappa_J = 0$. ממשפט קרטן נקבל כי J אידאל פתיר - כלומר $\text{Rad}(L) = 0$, כלומר $J = 0$ ולכן κ אינה מנוונת.

$2 \Rightarrow 3$: יהי אידאל $J \subset L$ קומוטטיבי - כלומר

$$[J, J] = 0$$

בבירור, J אידאל נילפוטנטי, ואז $J \subset n_L$. ראינו שמתקיים $\kappa(n_L, L) = 0$, כלומר $n_L \subset \{x \in L \mid \kappa(x, L) = 0\}$ - הקבוצה הזו היא 0 מההנחה שלנו, ולכן $J = 0$.
 $1 \Rightarrow 2$: בשלילה, נניח כי $\text{Rad} L \neq 0$. זהו אידאל פתיר. נניח כי $(\text{Rad} L)^{(i)} \neq 0$, וכן $(\text{Rad} L)^{(i+1)} \neq 0$. כיוון שהקומוטטור של שני אידאלים של L הוא אידאל, נקבל כי $J = (\text{Rad} L)^{(i)}$ אידאל של L . מהגדרת i מתקיים $[J, J] = 0$, ועל כן J קומוטטיבי ואינו אפס - בסתירה. ■

דוגמא נחשב את תבנית קילינג של $g_n^1 F$. נייצג מטריצות כאן בתור

$$x = \sum_{i,j} x_{i,j} e_{i,j}$$

נרצה לתאר את המטריצה המייצגת של adx .

$$\begin{aligned} \text{adx}(e_{i,j}) &= x e_{i,j} - e_{i,j} x = \sum_{r,s} x_{r,s} e_{r,s} e_{i,j} - \sum_{r,s} x_{r,s} e_{i,j} e_{r,s} = \\ &= \sum_r x_{r,i} e_{r,j} - \sum_s x_{j,s} e_{i,s} \end{aligned}$$

נקבל שמתקיים

$$(\text{adx})_{(r,s),(i,j)} = \begin{cases} 0 & r \neq i, s \neq j \\ -x_{j,s} & r = i, s \neq j \\ x_{r,i} & r \neq i, s = j \\ x_{i,i} - x_{j,j} & r = i, s = j \end{cases}$$

כעת,

$$\begin{aligned}\kappa(x, y) &= \text{tr}(\text{ad}x \text{ad}y) = \sum_{i,j,r,s=1}^n (\text{ad}x)_{(r,s)(i,j)} (\text{ad}y)_{(i,j)(r,s)} = \cdots = \\ &= 2n \sum_{j,s=1}^n x_{j,s} y_{s,j} - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_{i,i} \right) \left(\sum_{j=1}^n y_{j,j} \right) = 2n \text{tr}(xy) - 2 \text{tr}(x) \text{tr}(y)\end{aligned}$$

אם ניקח $x = \lambda I$ נקבל כמובן

$$2n\lambda \text{tr}y - 2\lambda n \text{tr}y = 0$$

אז המרכז (המטריצות הסקלריות) מאונך לכל האלגברה. נצמצם כעת לאידאל $J = \text{sl}_n F$ ונקבל

$$x_{\text{sl}_n F}(x, y) = 2n \text{tr}(xy)$$

וזו תבנית לא מנוונת.

2.3 פירוק אלגברת לי פשוטה למחצה לסכום ישר של אלגבראות לי פשוטות

טענה 2.8 נתונות אלגבראות לי $L_1, \dots, L_k$ מעל F . אזי אלגברת לי $L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$ פשוטה למחצה אם ורק אם L_i פשוטה למחצה לכל i .

הוכחה: מספיק להוכיח עבור $k = 2$. נראה כי

$$\text{Rad}(L_1 \times L_2) = \text{Rad}(L_1) \times \text{Rad}(L_2)$$

אגף ימין בבירור פתיר, ועל כן מוכל בצד שמאל. להיפך, יהי $R \subset L_1 \times L_2$ אידאל פתיר. נסמן J_1, J_2 את ההטלות של R על L_1, L_2 בהתאמה. אזי $J_1 \subset L_1, J_2 \subset L_2$ אידאלים פתירים, ולכן $J_1 \subset \text{Rad}L_1, J_2 \subset \text{Rad}L_2$. כמובן, $R \subset J_1 \times J_2 \subset \text{Rad}L_1 \times \text{Rad}L_2$. נציב $R = \text{Rad}(L_1 \times L_2)$ ונסיים. ■

טענה 2.9 תהי L אלגברת לי ממימד סופי מעל שדה F . יהי $K \supset F$ שדה הרחבה.נסתכל בהרחבת הסקלרים $L_K = L \otimes_F K$.

1. L פשוטה למחצה אם ורק אם L_K פשוטה למחצה.

$$2. \text{Rad}L_K = \text{Rad}L \otimes_F K$$

הוכחה:

1. יהי $x_1, \dots, x_n$ בסיס של L מעל F . אזי $x_1 \otimes 1, \dots, x_n \otimes 1$ בסיס של L_K מעל K . מתקיים

$$\kappa_L(x_i, x_j) = \kappa_{L_K}(x_i \otimes 1, x_j \otimes 1)$$

ידוע לנו כי L פשוטה למחצה אם ורק אם κ_L לא מנוונת, כלומר אם ורק אם המטריצה $(\kappa_L(x_i, x_j))_{i,j}$ הפיכה, שזה אם ורק אם המטריצה $(\kappa_{L_K}(x_i \otimes 1, x_j \otimes 1))_{i,j}$ הפיכה, אם ורק אם κ_{L_K} לא מנוונת, אם ורק אם L_K פשוטה למחצה.

2. מתקיים $\text{Rad} L \subset L$ אידיאל פתח, ולכן גם $\text{Rad} L \otimes_F K$ אידיאל פתח של L_K .
כמובן,

$$(\text{Rad} L \otimes_F K)^{(i)} = (\text{Rad} L)^{(i)} \otimes_F K$$

ולכן

$$\text{Rad} L \otimes_F K \subset \text{Rad} L_K$$

יש לנו את הסדרה המדויקת

$$0 \rightarrow \text{Rad} L \rightarrow L \rightarrow L/\text{Rad} L \rightarrow 0$$

והרי K מודול חופשי מעל F , ולכן הפעלת הטנזור תשמור על הסדרה מדויקת -
נקבל

$$0 \rightarrow \text{Rad} L \otimes_F K \rightarrow L \otimes_F K \rightarrow L/\text{Rad} L \otimes_F K \rightarrow 0$$

נקבל כי

$$L \otimes_F K / \text{Rad} L \otimes_F K \cong L / \text{Rad} L \otimes_F K$$

והרי $L/\text{Rad} L$ פשוטה למחצה - ולכן אגף ימין כולו פשוט למחצה - כלומר,

$$\text{Rad}(L_K) / \text{Rad} L \otimes_F K \subset \text{Rad}(L \otimes_F K / \text{Rad} L \otimes_F K) = 0$$

כלומר $\text{Rad}(L_K) = \text{Rad}(L) \otimes_F K$.

■