

אלגבראות לי

© ארזים

31 במרץ 2019

1 פתירות ונילפוטנטיות באלגבראות לי

1.1 משפט לי

נזכיר איפה עצרנו:

משפט 1.1 תהי L אלגברת לי מעל שדה F ממצוין 0. תהי π הצגה ממימד סופי של L במרחב V . יהי $J \subset L$ אידאל ויהי $\lambda \in J^*$. יהי

$$V_\lambda = \{u \in V \mid \pi(x)v = \lambda(x)v \forall x \in J\}$$

אזי $V_\lambda \subset V$ תת מרחב אינווריאנטי של π .

הוכחה: אם $V_\lambda = 0$ סיימנו. אחרת, נרצה להראות שלכל $x \in L$, $v \in V_\lambda$ מתקיים $\pi(x)v \in V_\lambda$ כלומר לכל $y \in J$ מתקיים

$$\pi(y)(\pi(x)v) = \lambda(y)\pi(x)v$$

מתקיים

$$\begin{aligned}\pi(y)\pi(x)v &= \pi(x)\pi(y)v + \pi([y, x])v = \\ &= \pi(x)\lambda(y)v + \lambda([y, x])v\end{aligned}$$

ולכן נותר יספיק להוכיח כי $\lambda([y, x]) = 0$ לכל $x \in L$, $y \in J$. נקבע $v_0 \in V_\lambda$, $v_0 \neq 0$. נגדיר לכל i :

$$v_i = \pi(x)^i v_0$$

יהי k מקסימלי עבורו $v_0, v_1, \dots, v_k$ היא בלתי תלויה לינארית. נסמן

$$V' = Fv_0 + \dots + Fv_k$$

כעת,

$$\pi(x)V' = \sum_{i=0}^k F\pi(x)v_i = \sum_{i=0}^k Fv_{i+1} \subset \sum_{i=0}^k Fv_i = V'$$

כעת נראה כי V' אינווריאנטי גם תחת $\pi(J)$. יהי $y \in J$. נראה באינדוקציה שלכל $y \in J$ מתקיים

$$\pi(y)v_i \in \lambda(y)v_i + Fv_{i-1} + \dots + Fv_0$$

עבור $i \leq k$. עבור $i = 0$ נקבל $\pi(y)v_0 = \lambda(y)v_0$, וזה נכון. כעת,

$$\begin{aligned}\pi(y)v_{i+1} &= \pi(y)\pi(x)v_i = \pi(x)\pi(y)v_i + \pi([y, x])v_i \in \\ &\in \pi(x)(\lambda(y)v_i + Fv_{i-1} + \dots + Fv_0) + \lambda([y, x])v_i + Fv_{i-1} + \dots + Fv_0 = \\ &= \lambda(y)v_{i+1} + Fv_i + \dots + Fv_1 + Fv_0\end{aligned}$$

קיבלנו כמובן $\pi(y)V' \subset V'$ לכל $y \in J$, אבל בנוסף קיבלנו גם כי לכל $y \in J$ מתקיים

$$\text{tr}(\pi(y)|_{V'}) = (k+1)\lambda(y)$$

בפרט, לכל $x \in L$ ולכל $y \in J$ מתקיים

$$\text{tr}(\pi([y, x])|_{V'}) = (k+1)\lambda([y, x])$$

אבל בצד שמאל למעשה יש לנו

$$\text{tr}(\pi(y)|_{V'}\pi(x)|_{V'} - \pi(x)|_{V'}\pi(y)|_{V'}) = 0$$

ולכן

$$(k+1)\lambda([y, x]) = 0$$

■

והרי F ממציין 0, ולכן $\lambda([y, x]) = 0$.

מעתה נניח כי המציין של השדה הוא 0.

משפט 1.2 תהי π הצגה ממימד סופי של אלגברת לי L במרחב V . נניח כי L פתירה. נניח כי לכל $x \in L$, האופרטור $\pi(x)$ ניתן לשילוש. אזי קיים למרחב V בסיס B עבורו $[\pi(x)]_B$ משולשת עליונה לכל $x \in L$ (שילוש סימולטני).

הוכחה: כיוון שיש את $\pi(L) \subset \text{gl}(V)$ שהיא תת אלגברת לי פתירה ממימד סופי מעל F , אפשר להניח כי L ממימד סופי (כי נחליף את L עם $\pi(L)$). ראשית, נוכיח כי יש וקטור עצמי משותף לכל $\pi(L)$. נוכיח זאת באינדוקציה על $\dim L$. אם $\dim L = 1$, אזי $L = Fx_0$, ונתון כי $\pi(x_0)$ ניתן לשילוש למטריצה משולשת עליונה, ואז הווקטור הראשון בבסיס המתאים הוא ווקטור עצמי של $\pi(x_0)$, ולכן גם של כל $\pi(L)$. באופן כללי, L פתירה, ולכן

$$[L, L] \subsetneq L$$

ראינו כי כל תת מרחב $[L, L] \subset J \subset L$ הוא אידאל. נקח J מקסימלי. כמובן, גם J פתיר (כתת אלגברת לי). כמו כן, $\pi|_J$ היא הצגה של J . כיוון שמתקיים $\dim J = \dim L - 1$, אזי באינדוקציה יש $v_0 \in V$ שהוא ווקטור עצמי משותף לכל $\pi(J)$, כלומר לכל $y \in J$ מתקיים

$$\pi(y)v_0 = \lambda(y)v_0$$

כמוכן, $\lambda \in J^*$. נתבונן, כמו קודם, במרחב

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \pi(y)v = \lambda(y)v \forall y \in J\}$$

זה תת מרחב שאינווריאנטי להצגה π . כעת, יהי $x \in L$ עבורו $L = J \oplus Fx_0$. בפרט,

$$\pi(x_0)V_\lambda \subset V_\lambda$$

כמוכן, $\pi(x_0)$ ניתן לשילוש, ולכן $\pi(x_0)|_{V_\lambda}$ ניתן לשילוש. בפרט, יש לה ווקטור עצמי בתוך V_λ : יהי $w_0 \in V_\lambda, w_0 \neq 0$ עבורו $\pi(x)w_0 = cw_0$. נכתוב $x = y + t \cdot x_0$, כאשר $y \in J, t \in F$, כעת,

$$\pi(x)w_0 = \pi(y)w_0 + t\pi(x_0)w_0 = \lambda(y)w_0 + tcw_0 = (\lambda(y) + tc)w_0$$

ולכן w_0 ווקטור עצמי משותף לכל $\pi(L)$. כעת נראה באינדוקציה על $\dim V$ את השילוש הסימולטני. אם $\dim V = 1$ הטענה ברורה. באופן כללי, יהי $v_1 \in V, v_1 \neq 0$ ווקטור עצמי משותף לכל $\pi(L)$, כלומר $\pi(x)v_1 = \lambda(x)v_1$ עבור $\lambda \in V^*$. בפרט, $V_1 = Fv_1$ הוא תת מודול (תת מרחב אינווריאנטי) של V . נתבונן בהצגת המנה $\bar{\pi}$ של L במרחב המנה $U = V/V_1$

$$\bar{\pi}(x)(v + V_1) = \pi(x)v + V_1$$

ברור כי המימד של מרחב זה קטן באחד, וברור גם כי $\bar{\pi}(x)$ ניתן לשילוש לכל $x \in L$. מהנחת האינדוקציה $\bar{\pi}$ ניתנת לשילוש סימולטני - כלומר קיים בסיס $\{v_2 + V_1, \dots, v_n + V_1\}$ כך שלכל $x \in L$ המטריצה $[\bar{\pi}(x)]_{\bar{B}}$ משולשת עליונה. יהי

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

זהו בסיס למרחב V . כעת ברור כי $[\pi(x)]_B$ היא משולשת עליונה לכל $x \in L$, וסיימנו. ■

משפט 1.3 (לי) תהי L אלגברת לי פתירה מעל שדה סגור אלגברית F . תהי π הצגה ממימד סופי n של L במרחב V . אזי קיים בסיס B של V עבורו $[\pi(x)]_B \in b(n, F)$ לכל $x \in L$.

הוכחה: סגור אלגברית, לכן כל מטריצה ניתנת לשילוש - ומכאן המשפט נובע מהמשפט הקודם. ■

מסקנה 1.4 תהי L אלגברת לי פתירה מעל שדה סגור אלגברית. תהי π הצגה אי פריקה ממימד סופי של L . אזי π ממימד 1.

הוכחה: ממשפט לי, יש ווקטור עצמי משותף לכל π במרחב ההצגה V , שנשמנו v_1 . בפרט, $0 \neq Fv_1 \subset V$ הוא תת מודול. π אי פריקה, ולכן $V = Fv_1$ ממימד 1. ■

מסקנה 1.5 תהי L אלגברת לי פתירה ממימד סופי מעל שדה סגור אלגברית F . אז יש סדרה עולה של אידאלים

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_n = L$$

עבורה מתקיים $\dim J_i = i$ לכל i .

הוכחה: נתבונן בהצגה $\pi = \text{ad}$ של L במרחב L . ממשפט לי, יש בסיס B של L עבורו $[\text{ad}x]_B \in b(n, F)$, כאשר $n = \dim_F L$. נסמן $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. נגדיר

$$\begin{aligned} J_0 &= 0 \\ J_1 &= Fv_1 \\ &\vdots \\ J_i &= Fv_1 \oplus \dots \oplus Fv_i \\ &\vdots \\ J_n &= Fv_1 \oplus \dots \oplus Fv_n = L \end{aligned}$$

כמובן, $0 = J_0 \subset J_1 \subset \dots \subset J_n = L$, כמו כן, כל J_i הוא תת מרחב אינווריאנטי של ad , בגלל השילוש - כלומר לכל $x \in L$ מתקיים $[x, J_i] \subset J_i$ - כלומר J_i אידאל. ■

משפט 1.6 תהי L אלגברת לי מעל שדה F . אזי L פתירה אם ורק אם $[L, L]$ היא אלגברת לי נילפוטנטית.

הוכחה: נניח כי L פתירה. ראשית, נניח כי F סגור אלגברית. כמו קודם, ההצגה ad של L במרחב L ניתנת לשילוש סימולטני. יהי B בסיס של L כך שלכל $x \in L$ המטריצה $[\text{ad}x]_B \in b(n, F)$, כאשר $n = \dim_F L$. כלומר, $[\text{ad}L]_B \subset b(n, F)$. כמו כן,

$$[\text{ad}[L, L]]_B = [[\text{ad}L, \text{ad}L]]_B \subset [b(n, F), b(n, F)] = n(n, F)$$

ידוע לנו כי $n(n, F)$ היא נילפוטנטית - ונסיק מכאן כי $\text{ad}[L, L]$ היא אלגברת לי נילפוטנטית. מכאן, לכל $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in [L, L]$ נקבל כי

$$[x_1 [x_2, [\dots [x_n, x_{n+1}] \dots]]]$$

הוא 0 - שכן כתוב כאן למעשה $(\text{ad}x_1 (\text{ad}x_2 (\dots (\text{ad}x_n (x_{n+1}))))$ והרכבה של n העתקות מתוך $n(n, F)$ היא 0. למעשה, ניתן היה לקחת $x_{n+1} \in L$ באופן כללי. זה מראה שהאלגברה $[L, L]$ נילפוטנטית - ואפילו יותר, זה מראה שלכל $x_1, \dots, x_n \in [L, L]$, ההרכבה של $\text{ad}x_i$ היא אופרטור האפס על כל L .

כעת, נניח כי F שדה כלשהו, ויהי $\bar{F}$ הסגור האלגברי של F . נתבונן בהרחבת הסקלרים

$$\bar{L} = L \otimes_F \bar{F}$$

היא פתירה, שכן L פתירה (ראינו בתרגילי הבית). לכן, ממה שראינו הרגע, $[\bar{L}, \bar{L}]$ נילפוטנטית, והרי $[\bar{L}, \bar{L}] \subset [L, L] \otimes_F \bar{F}$, ולכן נקבל כי $[L, L]$ נילפוטנטית. בכיוון השני - נניח כי $[L, L]$ היא אלגברת לי נילפוטנטית. אזי

$$L^{(i+1)} = [L, L]^{(i)} \subset [L, L]_i$$

ולכן כיוון שהחל מאיפשהו צד ימין מתאפס, גם צד שמאל יתאפס משם, ולכן L פתירה. ■

1.2 משפט אנגל

תהי L אלגברת לי נילפוטנטית, כלומר יש N טבעי עבורו $L_N = 0$, כלומר לכל $x_1, \dots, x_n \in L$ מתקיים

$$[x_1, [x_2, [\dots, [x_{n-1}, x_n] \dots]] = 0$$

כלומר, $\text{ad} x_1 \text{ad} x_2 \dots \text{ad} x_n = 0$. בפרט, העתקה לינארית נילפוטנטית לכל $x \in L$

טענה 1.7 תהי L אלגברת לי נילפוטנטית ממימד סופי. יהי $J \subset L$ אידאל. אזי $J \cap Z(L) \neq 0$

הוכחה: נתבונן בהצגה $\text{ad}_L|_J$ של J במרחב L . זאת הצגה ממימד סופי של L כך שלכל $x \in L$ האופרטור $\pi(x) = \text{ad} x$ הוא נילפוטנטי על L , ולכן נילפוטנטי גם על J . בפרט, $\pi(x)$ ניתן לשילוש לכל $x \in L$. נילפוטנטיות ועל כן כמובן פתירה, ולכן ראינו כבר שקיים שילוש סימולטני של ההצגה. בפרט, קיים ווקטור עצמי משותף $y_0 \in J$ $y_0 \neq 0$ עבורו לכל $x \in L$ מתקיים

$$\begin{aligned} \text{ad} x(y_0) &= 0 \\ [x, y_0] &= 0 \end{aligned}$$

■

כלומר $y_0 \in J \cap Z(L)$ וסיימנו.

הערה 1.8 היה מספיק להניח כי J ממימד סופי, ולא כל L .

משפט 1.9 (אנגל) תהי L אלגברת לי ממימד סופי. נניח כי לכל $x \in L$ האופרטור $\text{ad} x$ הוא נילפוטנטי על L . אזי L אלגברת לי נילפוטנטית.

הוכחה: נוכיח ראשית כי L פתירה. תהי $L' \subset L$ תת אלגברת לי פתירה ממימד מקסימלי. נבחין כי לכל $x \in L$, $0 \neq x$, האלגברה $Fx \subset L$ היא תת אלגברת לי פתירה - כי היא אבליה - ולכן L' מוגדרת היטב. נניח בשלילה כי $L' \subsetneq L$. נתבונן בהצגה π של L' במרחב L המוגדרת על ידי

$$\pi(x') = \text{ad}_L x'$$

כמובן, L' תת מרחב אינווריאנטי (כלומר תת מודול), ולכן נוכל להסתכל בהצגת המנה $\bar{\pi}$ של L'/L' במרחב המנה L/L' -

$$\bar{\pi}(x')(z + L') = [x', z] + L'$$

האופרטור $\text{ad}_L x'$ נילפוטנטי על L לכל x' , אז ברור שגם $\bar{\pi}(x')$ נילפוטנטי על L/L' - ולכן ניתן לשילוש. הואיל והאלגברה L' פתירה נקבל כי $\bar{\pi}$ ניתנת לשילוש סימולטני, ובפרט יש לאופרטורים $\bar{\pi}(L')$ וקטור עצמי משותף, כלומר יש $x_0 \in L \setminus L'$ עבורו $\bar{\pi}(x')(x_0 + L') = (x_0 + L')$ וכן $x' \in L'$ נגדיר כעת $L'' = L' + Fx_0$. נסיק כי L'' היא תת אלגברת לי, וכן L' אידאל של L'' מקומימד 1 - כלומר L''/L' פתירה (כי היא ממימד 1), ולכן גם L'' פתירה - בסתירה למקסימליות המימד של L' . קיבלנו כי $L = L'$ פתירה.

נתבונן בהצגה $\pi = \text{ad}_L$ של L במרחב L . כיוון שלכל $x \in L$ האופרטור $\pi(x)$ נילפוטנטי, אזי הוא גם ניתן לשילוש - ולכן יש שילוש סימולטני של π , כלומר בסיס B של

L עבורו $[adL]_B \subset b(n, F)$, עבור $n = \dim_F L$. הערך העצמי היחיד של כל האופרטורים הללו הוא 0, שכן הם נילפוטנטיים, ולכן למעשה $[adL]_B \subset n(n, F)$. אגף ימין היא אלגברת לי נילפוטנטית, כפי שראינו כבר, ולכן גם adL נילפוטנטית - והרי $adL \cong L/Z(L)$, ולכן ראינו כי גם L נילפוטנטית. ■

למה 1.10 יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. נניח כי $x \in gl(V)$ העתקה לינארית נילפוטנטית. אזי גם adx היא נילפוטנטית.

הוכחה: נכתוב

$$ad^m x(y) = [x, [x, [\dots, [x, y] \dots]]]$$

כאשר נפתח את כל הקומוטטורים, נקבל סכום (עם סימונים כלשהם) של גורמים מהצורה $x^i y x^j$ עם $i + j = m$. לכן, אם $x^n = 0$ וניקח $m = 2n$, אזי $i \geq n$ או $j \geq n$ ולכן כל גורם הוא 0 - כלומר $ad^m x = 0$. ■

מסקנה 1.11 תהי π הצגה ממימד סופי של אלגברת לי L במרחב V . נניח כי לכל $x \in L$ האופרטור $\pi(x)$ הוא נילפוטנטי. אזי $\pi(L)$ אלגברת לי נילפוטנטית, ויש בסיס B של V עבורו

$$[\pi(L)]_B \subset n(\dim_F L, F)$$

הוכחה: לפי הלמה, $ad\pi(x)$ נילפוטנטי לכל $x \in L$, ולכן $\pi(L)$ מקיימת את תנאי משפט אנגל - וסיימנו (השילוש הסימולטני כמובן נובע כמו שראינו בהוכחת משפט אנגל). ■

1.3 התנאי של קרטאן (Cartan) לפתירות אלגברת לי

ניזכר בתבנית קילינג של אלגברת לי L ממימד סופי:

$$\kappa(x, y) = \text{tr}(ad_L x \circ ad_L y)$$

משפט 1.12 תהי L אלגברת לי פתירה ממימד סופי מעל F . אזי

$$\kappa(L, [L, L]) = 0$$

כלומר לכל $x, y, z \in L$ מתקיים

$$\text{tr}(adx \circ ad[y, z]) = 0$$

הוכחה: נניח קודם כי F סגור אלגברית. ראינו כי יש בסיס B של L עבורו $[\text{ad}L]_B \subset b(n, F)$ כאשר $n = \dim_F L$. מכאן,

$$[\text{ad}[L, L]]_B = [\text{ad}L, \text{ad}L]_B \subset [b(n, F), b(n, F)] = n(n, F)$$

על כן, בהינתן $x, y, z \in L$ נקבל כי

$$\text{tr}(\text{ad}x \circ \text{ad}[y, z]) = \text{tr}([\text{ad}x]_B [\text{ad}y]_B, [\text{ad}z]_B)$$

המוכפל הימני כאן נילפוטנטי - ועל כן נקבל כמובן 0. באופן כללי, יהי $\bar{F}$ הסגור האלגברי של F , ויהי $\bar{L} = L \otimes_F \bar{F}$ הרחבת הסקלרים. זו גם כן פתירה. נניח כי $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ בסיס של L מעל F :

$$\begin{aligned} L &= Fx_1 \oplus \dots \oplus Fx_n \\ L \otimes_F \bar{F} &= x_1 \otimes \bar{F} \oplus \dots \oplus x_n \otimes \bar{F} \end{aligned}$$

כעת, $B \otimes 1 = \{x_1 \otimes 1, \dots, x_n \otimes 1\}$ הוא בסיס של $\bar{L}$ מעל F . כעת,

$$\text{ad}_{\bar{L}}(x \otimes 1) = \text{ad}_L x \otimes \text{id}_{\bar{F}}$$

ועל כן

$$[\text{ad}_{\bar{L}}(x \otimes 1)]_{B \otimes 1} = [\text{ad}_L x]_B$$

נסיק מכאן שלכל $x, y \in L$ מתקיים

$$\kappa_{\bar{L}}(x \otimes 1, y \otimes 1) = \kappa_L(x, y)$$

לפי מה שהוכחנו כבר,

$$\kappa_{\bar{L}}(\bar{L}, [\bar{L}, \bar{L}]) = 0$$

והרי

$$\kappa(L, [L, L]) \subset \kappa(\bar{L}, [\bar{L}, \bar{L}])$$

■

תזכורת פירוק ז'ורדן: יהי V מרחב ווקטורי מממד סופי מעל שדה F . תהי $x \in \text{End}_F V$, כך שכל הערכים העצמיים של x נמצאים בשדה F . אז יש פירוק

$$x = x_s + x_n$$

כאשר x_s ניתנת ללכסון (מעל F), x_n נילפוטנטית, וכן $x_s x_n = x_n x_s$. כמו כן, יש פולינומים $f(t), g(t) \in F[t]$ כך שמתקיים

$$x_s = f(x), x_n = g(x)$$

וניתן לבחור את f, g כך שיקיימו $f(0) = g(0) = 0$.

למה 1.13 בסימונים הללו,

$$\text{adx} = \text{adx}_s + \text{adx}_n$$

הוא פירוק זיורדן של adx .

הוכחה: נעבור לקואורדינטות לפי בסיס B המלכסן את x_s (ושמיט את הסימון של המטריצה המייצגת). נשתמש בבסיס הסטנדרטי $e_{i,j}$ ונקבל

$$\text{adx}_s(e_{i,j}) = x_s e_{i,j} - e_{i,j} x_s = \lambda_i e_{i,j} - \lambda_j e_{i,j} = (\lambda_i - \lambda_j) e_{i,j}$$

כאשר λ_i הוא הערך העצמי מספר i על האלכסון. לכן adx_s ניתנת ללכסון. בלמה קודמת ראינו כי adx_n נילפוטנטית, שכן x_n נילפוטנטית, והרי

$$[\text{adx}_s, \text{adx}_n] = \text{ad}[x_s, x_n] = \text{ad}0 = 0$$

■

וסיימנו.

בפעם הבאה, נוכיח את המשפט הבא:

משפט 1.14 יהי V מרחב ווקטורי ממימד סופי מעל שדה F . תהי $L \subset \text{gl}(V)$ תת אלגברת לי. נניח כי לכל $x, y \in [L, L]$ מתקיים

$$\text{tr}(xy) = 0$$

אזי $[L, L]$ נילפוטנטית.