

# אלגבראות לי

© ארזים

24 במרץ 2019

## 1 מושגים ראשוניים

### 1.1 מודולים והצגות

**למה 1.1** (שור)  $L$  תהי אלגברת לי מעל שדה  $F$ . יהי  $V$  מודול אי פריק מעל  $L$ . יהי  $W$  מודול כלשהו מעל  $L$ .

1. יהי  $0 \neq T \in \text{Hom}_L(V, W)$  אזי  $T$  חד-חד-ערכי.
2. יהי  $0 \neq T \in \text{Hom}_L(W, V)$  אזי  $T$  על.
3. נניח כי  $W$  מודול אי פריק מעל  $L$ . אזי  $V \cong W \iff \text{Hom}_L(V, W) \neq 0$ .
4. נניח כי  $V$  ממימד סופי וכן כי  $F$  סגור אלגברית. אזי  $\text{Hom}_L(V, V) = F \cdot \text{id}_V$ .

**הוכחה:**

1. ידוע כי  $\ker T \subset V$  תת מודול.  $V$  אי פריק, ולכן מתקיים  $\ker T \in \{0, V\}$ .  $T \neq 0$ , ולכן  $\ker T \neq V$ , ולכן  $\ker T = 0$ , ומכאן  $T$  חד-חד-ערכי.
2. ידוע כי  $\text{Im} T \subset V$  תת מודול.  $V$  אי פריק, ולכן מתקיים  $\text{Im} T \in \{0, V\}$ .  $T \neq 0$ , ולכן  $\text{Im} T \neq 0$ , ולכן  $\text{Im} T = V$ , ומכאן  $T$  על.
3. הכיוון  $\Leftarrow$  ברור. בכיוון השני, נניח שקיים  $0 \neq \varphi \in \text{Hom}_L(V, W)$ . מהסעיפים הקודמים,  $\varphi$  חד-חד-ערכי ועל, ולכן איזומורפיזם.
4. נניח כי  $T : V \rightarrow V$  הומומורפיזם.  $F$  סגור אלגברית וכן  $V$  ממימד סופי, ולכן יש להומומורפיזם  $T$  ערך עצמי  $\lambda \in F$ , המקיים  $\ker(T - \lambda \text{id}_V) \neq 0$ . כמובן,  $\ker(T - \lambda \text{id}_V) = V$  ולכן נובע  $T - \lambda \text{id}_V = 0$ . כלומר  $T = \lambda \text{id}_V$ .

■

### 1.2 סדרות הרכב ופריקות לחלוטין

**הגדרה 1.2** יהי  $V$  מודול מעל אלגברת לי  $L$ . **סדרת הרכב** (Composition Series) היא סדרת תת מודולים

$$V = V_n \supsetneq V_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0 = 0$$

כך שלכל  $1 \leq i \leq n$  המודול  $V_i/V_{i-1} \neq 0$  הוא אי פריק מעל  $L$ .

**טענה 1.3** יהי  $V$  מודול ממימד סופי מעל  $L$ . אז קיימת סדרת הרכב של  $V$ .

**הוכחה:** יהי  $W_1 \subsetneq V$  תת מודול של  $V$  ממימד מקסימלי. אזי  $V/W_1$  הוא מודול אי פריק (אם היה לו תת מודול, הוא היה מתאים לתת מודול של  $V$  שמכיל את המודול  $W_1$ ). יהי  $W_2 \subsetneq W_1$  תת מודול של  $W_1$  ממימד מקסימלי. אזי גם  $W_1/W_2$  מודול אי פריק (מאותה סיבה). נמשיך כך עד שהתהליך יסתיים - זה מובטח בזכות סופיות המימד של  $V$ . ■

**משפט 1.4** (ז'ורדן-הלדר) יהי  $V$  מודול מעל  $L$  ונניח כי יש לו שתי סדרות הרכב:

$$V = V_n \supsetneq V_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0 = 0$$

$$V = W_m \supsetneq W_{m-1} \supsetneq \cdots \supsetneq W_1 \supsetneq W_0 = 0$$

אזי  $m = n$  ויש תמורה  $\sigma$  של  $\{1, 2, \dots, n\}$  כך שלכל  $i$  מתקיים

$$V_i/V_{i-1} \cong W_{\sigma(i)}/W_{\sigma(i)-1}$$

ההוכחה של המשפט זהה לחלוטין להוכחה שלו בתורת החבורות על ידי תרגום של תת-חבורות לתתי מודולים, וחבורות פשוטות למודלים אי פריקים.

נניח כי  $V$  מודול ממימד סופי מעל  $L$ . תהי

$$V = V_n \supsetneq V_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0 = 0$$

יהי  $B_1$  בסיס של  $V_1$ . נשלים אותו לבסיס  $B_2$  של  $V_2$ , שנשלים לבסיס  $B_3$  של  $V_3$  וכן הלאה, עד שנקבל בסיס  $B$  של  $V_n = V$ . נתבונן בהצגה התאימה למודול  $V$ :

$$\pi(x)(v) = x \cdot v$$

אזי יתקיים

$$[\pi(x)]_B = \begin{pmatrix} \tau_1(x) & & & * \\ & \tau_2(x) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tau_n(x) \end{pmatrix}$$

בצורת בלוקים, כאשר

$$\tau_1(x) = [\pi(x)|_{V_1}]_{B_1}$$

$$\tau_2(x) = [\bar{\pi}(x)|_{v_2/v_1}]_{(B_2 \setminus B_1) + V_1}$$

$$\tau_3(x) = [\bar{\pi}(x)|_{v_3/v_2}]_{(B_3 \setminus B_2) + V_2}$$

$\vdots$

וכן הלאה.

**מסקנה 1.5** תהי  $\pi$  הצגה של  $L$  במרחב  $V$ , כך שאפשר לפרק את  $V$  לסכום ישר סופי של תת מודולים אי פריקים. נניח כי יש שני פירוקים כאלה:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$$

אזי  $m = n$ , וקיימת תמורה  $\sigma$  של  $\{1, 2, \dots, n\}$  כך שלכל  $i$  מתקיים  $V_i \cong W_{\sigma(i)}$ .

**הוכחה:** פירוק כמו שמתואר במסקנה מגדיר לנו סדרת הרכב:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \oplus V_2 \supsetneq V_1 \supsetneq 0$$

ויש כזו סדרה גם לפירוק השני. מפעילים את משפט ז'ורדן-הלדר ומקבלים את המסקנה. ■  
 נישאר בסימונים המסקנה ונניח בלי הגבלת הכלליות כי  $W_i \cong V_i$  (על ידי סידור מחדש). כמו כן, נסדר את הפירוקים כך שמודולים איזומורפיים אלו לאלו יהיו צמודים בפירוק, כלומר

$$\begin{aligned} V_1 &\cong V_2 \cong \cdots \cong V_{i_1} \\ V_{i_1+1} &\cong V_{i_1+2} \cong \cdots \cong V_{i_1+i_2} \\ &\vdots \\ V_{i_1+\cdots+i_{r-1}+1} &\cong V_{i_1+\cdots+i_{r-1}+2} \cong \cdots \cong V_{i_1+\cdots+i_{r-1}+i_r} = V_n \end{aligned}$$

כאשר אין מבין  $V_{i_1}, V_{i_1+i_2}, \dots, V_{i_1+\cdots+i_r}$  זוג מודולים איזומורפיים. נסמן את המרכיבים האיזוטיפיים של  $V$  (לפי הפירוק):

$$\begin{aligned} U_1 &= V_1 \oplus \cdots \oplus V_{i_1} \\ U_2 &= V_{i_1+1} \oplus \cdots \oplus V_{i_1+i_2} \\ &\vdots \\ U_r &= V_{i_1+\cdots+i_{r-1}+1} \oplus \cdots \oplus V_{i_1+\cdots+i_r} \end{aligned}$$

כאשר כמובן  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$ .

**משפט 1.6** בהנחות וסימונים הללו, המרכיבים האיזוטיפיים של  $V$  תלויים רק במודול  $V$ , ולא בפירוק.

**הוכחה:** נסמן את המרכיבים האיזוטיפיים לפי הפירוק השני:

$$\begin{aligned} Z_1 &= W_1 \oplus \cdots \oplus W_{i_1} \\ &\vdots \\ Z_r &= W_{i_1+\cdots+i_{r-1}+1} \oplus \cdots \oplus W_{i_1+\cdots+i_r} \end{aligned}$$

נסמן כעת  $P_i : V \rightarrow W_i$  את ההטלה על  $W_i$ , כך שמתקיים  $P_i(W_j) = 0$  לכל  $i \neq j$ . זהו הומומורפיזם של מודולים. כמובן  $P_i|_{V_j} \in \text{Hom}_L(V_j, W_i)$ , ולכן, מהלמה של שור, אם  $V_j \not\cong V_i$  אזי  $P_i(V_j) = 0$ . כמו כן,  $P_i(V_j) \subset Z_s$  כאשר  $i, j$  אינדקסים שמופיעים בקבוצת האינדקסים

$$\{i_1 + \cdots + i_{s-1} + 1, \dots, i_1 + \cdots + i_s\}$$

כעת, נסמן  $Q_j : V \rightarrow Z_j$  את ההטלה אל  $Z_j$  שמתאפסת על  $Z_i$  לכל  $i \neq j$ . לפי מה שהסברנו עכשיו, ברור כי  $Q_j(U_i) = 0$  לכל  $i \neq j$  כמו כן. כעת, יהי  $u \in U_j$ . נפרק את  $u$  לפי הפירוק השני:

$$u = Q_1(u) + \cdots + Q_r(u) = Q_j(u) \in Z_j$$

ולכן  $U_j \subseteq Z_j$ . באופן סימטרי נקבל את ההכלה השנייה, וסיימנו. ■

**משפט 1.7** תהי  $\pi$  הצגה פריקה לחלוטין של  $L$  במרחב  $V$ . נניח כי מספר המרכיבים האי-פריקים סופי. נקבע פירוק

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$$

לתת מודולים אי פריקים, ויהי  $U \subsetneq V$  תת מודול. אזי קיים תת מודול  $Y \subset V$  המקיים  $V = U \oplus Y$ . אפשר לבחור את  $Y$  להיות סכום ישר של חלק מבין  $\{V_i\}_{i=1}^n$ .

**הוכחה:** נתבונן בתתי המודולים  $U \cap V_i$  - שהם תתי מודולים של  $V_i$ . הואיל ולקחנו את  $V_i$  להיות אי פריקים, נקבל כי  $U \cap V_i \in \{0, V_i\}$ . כלומר -  $V_i \subset U$  או  $U \cap V_i = 0$ . קיים  $i$  עבורו  $V_i \not\subset U$  שכן לקחנו  $U \subsetneq V$ , ואז  $U \cap V_i = 0$ . יהי  $i_1$  הראשון עבורו מתקיים  $U \cap V_{i_1} = 0$  - כלומר  $U + V_{i_1}$  הוא סכום ישר. לכל  $i \leq i_1$  מתקיים  $V_i \subset U + V_{i_1}$ . בדיוק כמו קודם, לכל  $i > i_1$  מתקיים  $V_i \subset U + V_{i_1}$  או  $(U + V_{i_1}) \cap V_i = 0$ . אם הראשון מתקיים לכל  $i > i_1$ , נקבל  $V = U \oplus V_{i_1}$ , וניקח  $Y = V_{i_1}$  ונסיים. אחרת, ניקח את  $i_2$  להיות האינדקס הראשון עבורו השני מתקיים - אזי  $U + V_{i_1} + V_{i_2}$  הוא סכום ישר. נמשיך כך, ומסופיות הפירוק התהליך חייב להסתיים - ולבסוף נקבל

$$V = U \oplus V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_k}$$

ונבחר

$$Y = V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_k}$$

■

בתרגיל הבית נראה הכללה של המשפט הזה לפירוק אינסופי, וכן נראה שהתכונה הזו מגדירה פריקות לחלוטין - אם היא מתקיימת, אזי המודול פריק לחלוטין.

## 2 פתירות ונילפוטנטיות באלגבראות לי

### 2.1 הגדרות ודוגמאות

**הגדרה 2.1** תהי  $L$  אלגברת לי מעל  $F$ . נגדיר את **הסדרה המרכזית היורדת** של  $L$  להיות

$$\begin{aligned} L_0 &= L \\ L_1 &= [L, L_0] = [L, L] \\ L_2 &= [L, L_1] = [L, [L, L]] \\ &\vdots \\ L_{i+1} &= [L, L_i] \end{aligned}$$

**טענה 2.2** השרשרת  $L = L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \dots$  היא שרשרת יורדת של אידאלים של  $L$ , כך שלכל  $i$  מתקיים

$$L_i/L_{i+1} \subseteq Z(L/L_{i+1})$$

**הוכחה:** כזכור, ראינו כי עבור שני אידאלים  $I, J \subset L$ , הקומוטטור  $[I, J] \subset L$  הוא אידאל. לכן  $L_1 = [L, L]$  הוא אידאל. באינדוקציה,  $L_i$  הוא אידאל לכל  $i$ . גם את ההכלות נראה באינדוקציה - בבירור  $L_1 \subset L_0$ . אם  $L_i \subset L_{i-1}$ , אזי  $[L_i, L_{i-1}] = L_i$ , אזי  $L_{i+1} = [L, L_i] \subset [L, L_{i-1}] = L_i$ . נותר להראות את הטענה על המרכזים - יהי  $x \in L_i$ . אזי לכל  $y \in L$  מתקיים

$$[y, x] \in [L, L_i] = L_{i+1}$$

ולכן

$$[y + L_{i+1}, x + L_{i+1}] = L_{i+1}$$

לכל  $y \in L$ , ועל כן נקבל כי

$$x + L_{i+1} \in Z(L/L_{i+1})$$

■

**הגדרה 2.3** נגדיר את **הסדרה הנגזרת** של  $L$  להיות

$$\begin{aligned} L^{(0)} &= L \\ L^{(1)} &= [L^{(0)}, L^{(0)}] = [L, L] \\ L^{(2)} &= [L^{(1)}, L^{(1)}] = [[L, L], [L, L]] \\ &\vdots \\ L^{(i+1)} &= [L^{(i)}, L^{(i)}] \end{aligned}$$

**טענה 2.4** השרשרת  $L = L^{(0)} \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \dots$  של אידאלים, כך שלכל  $i$  המנה  $L^{(i)}/L^{(i+1)}$  היא אבלית (כלומר הקומוטטור הוא זהותית 0). כמו כן,  $L^{(i)} \subset L_i$  לכל  $i$ .

ההוכחה לחלוטין אנלוגית לקודמת.

**הגדרה 2.5** תהי  $L$  אלגברת לי מעל שדה  $F$ .

1. נאמר כי  $L$  **נילפוטנטית** אם קיים  $n$  עבורו  $L_n = 0$ .

2. נאמר כי  $L$  **פתירה** אם קיים  $n$  עבורו  $L^{(n)} = 0$ .

**טענה 2.6** אם  $L$  נילפוטנטית אזי  $L$  פתירה.

**הוכחה:** נניח כי  $L_n = 0$ . כיוון שמתקיים  $L^{(n)} \subset L_n = 0$ , נקבל כי  $L^{(n)} = 0$ . ■

**דוגמאות**

1. אלגברת לי אבלית (מרחב ווקטורי) היא כמובן נילפוטנטית.

2. אלגברת לי פשוטה  $L$  היא בהכרח לא פתירה, שכן לפי הגדרה  $[L, L] \neq 0$ , ולכן  $L^{(1)} = [L, L] = L$ . כך נוכל להראות באינדוקציה כי  $L^{(i)} = L$  לכל  $i$ . למשל, האלגברה  $\mathfrak{sl}(2, F)$  אינה פתירה.
3. ניקח  $L = \mathcal{B}(n, F) \subset \mathfrak{gl}(n, F)$  ונראה שהיא פתירה, אך לא נילפוטנטית. נראה ראשית כי

$$[L, L] = n(n, F)$$

ההכלה  $\subset$  ברורה. בכיוון השני, ניקח את  $e_{ij}$  להיות המטריצה מגודל  $n \times n$  שיש לה 1 בקואורדינטה  $(i, j)$  ובכל קואורדינטה אחרת 0. כמובן,

$$e_{i,j}e_{r,s} = \delta_{j,r}e_{i,s}$$

כעת, עבור  $i \neq j$  מתקיים

$$[e_{i,i}, e_{i,j}] = e_{i,i}e_{i,j} - e_{i,j}e_{i,i} = e_{i,j} - 0 = e_{i,j}$$

כיוון שהקבוצה  $\{e_{i,j}\}_{i < j}$  היא בסיס של  $n(n, F)$  נקבל את ההכלה השנייה וממנה את השוויון. יתר על כן, קיבלנו כי  $[n(n, F), n(n, F)] = n(n, F)$ . אם כן, נקבל כי

$$[\mathcal{B}(n, F), n(n, F)] = n(n, F)$$

וכעת

$$L_2 = [L, L_1] = [\mathcal{B}(n, F), n(n, F)] = n(n, F)$$

ועל כן לכל  $n > 1$  נקבל  $L_n = n(n, F)$ , כלומר  $L$  לא נילפוטנטית. לעומת זאת, מכפל מטריצות ידוע לנו כי עבור  $u_1, \dots, u_k \in n(n, F)$  אזי בכפל  $u_1 \cdots u_k$  יש  $k$  אלכסונים רצופים (מתחילים בראשי ועולים למעלה) של אפסים. על כן, נקבל כי

$$L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}] = [n(n, F), n(n, F)]$$

וכן הלאה. אם  $2^{k-1} \geq n$  נקבל כי בהכרח  $L^{(k)} = 0$ , כי בקומוטטורים המגדירים אותה יהיו  $2^{k-1}$  מוכפלים בכל מחובר, ולכן כולם מתאפסים. כמו כן, רואים כי  $n(n, F)$  כמובן נילפוטנטית.

**הערה 2.7.** 1. נניח כי  $f: L \rightarrow M$  הומומורפיזם על של אלגבראות לי. אזי

$$\begin{aligned} f(L_i) &= M_i \\ f(L^{(i)}) &= M^{(i)} \end{aligned}$$

ועל כן אם  $L$  נילפוטנטית (בהתאמה, פתירה) אז גם  $M$  נילפוטנטית (בהתאמה, פתירה).

2. נניח כי  $R \subset L$  תת אלגברת לי. אזי

$$\begin{aligned} R_i &\subset L_i \\ R^{(i)} &\subset L^{(i)} \end{aligned}$$

ועל כן אם  $L$  נילפוטנטית (בהתאמה, פתירה) אז גם  $R$  נילפוטנטית (בהתאמה, פתירה).

3. יהי  $I \subset L$  אידאל. אזי  $L$  פתירה אם ורק אם  $I$  פתיר וגם  $L/I$  פתירה. אם  $L$  פתירה, שניהם נובעים בקלות מההערות הקודמות. להיפך, נניח כי  $(L/I)^{(n)} = 0$ . כמובן, מתקיים  $(L^{(n)}) = (L/I)^{(n)}$  כאשר  $\nu : L \rightarrow L/I$  הוא ההומומורפיזם הטבעי. לכן  $L^{(n)} \subset I$ . כיוון שגם  $I$  פתיר, יש עבורו  $m$  כזה ש- $I^{(m)} = 0$  ואז  $L^{(n+m)} = 0$ .

4. נניח כי  $L/Z(L)$  נילפוטנטית. אזי  $L$  נילפוטנטית, שכן אם  $(L/Z(L))_n = 0$ , אזי  $L_n \subset Z(L)$ . כלומר  $L_{n+1} = [L, L_n] = 0$ .

5. נניח כי  $L$  נילפוטנטית. אזי  $Z(L) \neq 0$ , שכן אם נניח כי  $L_n = 0$  וכן  $L_{n-1} \neq 0$ , נקבל כי

$$0 = L_n = [L, L_{n-1}]$$

כלומר  $0 \neq L_{n-1} \subset Z(L)$  וסיימנו.

6. יהיו  $I, J \subset L$  אידאלים פתירים. אזי  $I + J$  פתיר. נשתמש באיזומורפיזם

$$I+J/J \cong I/I \cap J$$

של מודולים מעל  $L$  וגם של אלגבראות לי.  $I$  פתיר, ולכן אגף ימין פתיר כתמונה הומומורפית של  $I$  (לפי סעיף 1). לכן אגף שמאל פתיר, והרי גם  $J$  פתיר, ועל כן, מסעיף 3, גם  $I + J$  פתיר.

7. תרגיל: יהיו  $I, J \subset L$  אידאלים נילפוטנטיים. אזי  $I + J$  אידאל נילפוטנטי.

**מסקנה 2.8** (מסעיף 6) תהי  $L$  אלגברת לי ממימד סופי מעל  $F$ . אז יש בתוך  $L$  אידאל פתיר מקסימלי יחיד - הוא מכיל כל אידאל פתיר של  $L$ .

**הוכחה:** יהי  $S \subset L$  אידאל פתיר בעל מימד מקסימלי, ויהי  $I \subset L$  אידאל פתיר. לפי סעיף 6 קודם נקבל כי  $I + S$  הוא אידאל פתיר המכיל את  $S$ . ממקסימליות המימד של  $S$  נקבל כי  $I \subset S$ , כלומר  $I + S = S$ . ■

**הגדרה 2.9** תהי  $L$  אלגברת לי ממימד סופי מעל  $F$ . האידאל מהמסקנה האחרונה ייקרא **הרדיקל** של  $L$ , ויסומן  $\text{Rad}(L)$ .  
אומרים כי  $L$  **פשוטה למחצה** (Semisimple) כאשר  $\text{Rad}(L) = 0$ .

כמובן,  $L$  פתירה אם ורק אם  $L = \text{Rad}(L)$ . באופן כללי, האלגברה  $L/\text{Rad}(L)$  היא פשוטה למחצה, שכן אידאל פתיר במנה הוא מהצורה  $I/\text{Rad}(L)$ , כאשר  $I \subset L$  אידאל.  $\text{Rad}(L) \subset I$  עצמו פתיר בגלל סעיף 3 בהערות קודם ( $\text{Rad}(L)$  פתיר וכן  $I/\text{Rad}(L)$  פתירה). אם כן,  $I = \text{Rad}(L)$  מהגדרת הרדיקל, ולכן  $I/\text{Rad}(L) = 0$  באלגברת המנה  $L/\text{Rad}(L)$ .

**טענה 2.10** תהי  $L$  אלגברת לי ממימד סופי. התנאים הבאים שקולים:

1.  $L$  פתירה.

2. קיימת סדרה יורדת של תת אלגבראות לי  $L = R_m \supset R_{m-1} \supset \dots \supset R_1 \supset R_0 = 0$ , כאשר  $R_i$  אידאל מקורי-מימד 1 בתוך  $R_{i+1}$  (כלומר  $\dim(R_{i+1}/R_i) = 1$ ).

**הוכחה:** נניח כי  $L$  פתירה. יש לנו את הסדרה הנגזרת

$$L = L^{(0)} \supset L^{(1)} \supset \dots \supset L^{(n-1)} \supset L^{(n)} = 0$$

נשים לב כי כל תת מרחב ווקטורי  $L \subset U \subset [L, L]$  הוא בהכרח אידאל - שכן אם  $x \in L, u \in U$  אזי

$$[x, u] \in [L, L] \subset U$$

$L$  פתירה, ולכן  $[L, L] \subsetneq L$ . יהיו  $x_0, x_1, \dots, x_{i_1-1} \in L$  בלתי תלויים לינארית מעל  $F$  המקיימים

$$L = Fx_0 \oplus Fx_1 \oplus \dots \oplus Fx_{i_1-1} \oplus L^{(1)}$$

כעת נגדיר

$$R_1 = Fx_1 \oplus \dots \oplus Fx_{i_1-1} \oplus L^{(1)}$$

$\vdots$

$$R_{i_1-1} = Fx_{i_1-1} \oplus L^{(1)}$$

$$R_{i_1} = L^{(1)}$$

אלה כולם אידאלים של  $L$ , ומהבנייה נקבל כי  $R_{j+1}$  הוא מקורי-מימד 1 בתוך  $R_j$ . נחזור על התהליך כאשר  $L^{(1)}$  במקום  $L$ ,  $L^{(2)}$  במקום  $L^{(1)}$ . נקבל סדרת אידאלים בתוך  $L_1$

$$L_1 = R_{i_1} \supset R_{i_1+1} \supset \dots \supset R_{i_2} = L^{(2)}$$

והתהליך הזה כמובן חייב להסתיים. כעת נראה את הכיוון השני - נניח קיום סדרת אידאלים כזו. מהנתון ברור כי  $\dim_F R_i = i$ . לכן,  $R_1$  פתיר, כי  $\dim R_1 = 1$  (ולכן  $R_1$  אבליית). גם  $R_2/R_1$  פתירה (כי גם היא מממד 1), ולכן  $R_2$  פתיר. באינדוקציה, נקבל כי  $R_m = L$  גם כן פתיר. ■

## 2.2 משפט לי

תהי  $L$  אלגברת לי. תהי  $R \subset L$  תת אלגברת לי, יהי  $V$  מודול מעל  $L$  ויהי  $\lambda \in R^*$ . נגדיר

$$V_\lambda = \{v \in V \mid x \cdot v = \lambda(x)v \forall x \in R\}$$

אם ניקח את  $\pi$  להיות ההצגה המתאימה למודול  $V$ , נקבל

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \pi(x)(v) = \lambda(x)v \forall x \in R\}$$

נשים לב שאם  $v \in V_\lambda$  נקבל

$$\pi([x, y])v = \lambda([x, y])v$$

$$\pi([x, y])v = \pi(x)\pi(y)v - \pi(y)\pi(x)v = \lambda(x)\lambda(y)v - \lambda(y)\lambda(x)v = 0$$

כלומר  $\lambda$  חייב להתאפס על כל קומוטטור (אם  $V_\lambda$  לא ריק). נשים לב כמובן כי  $V_\lambda$  הוא תת מודול מעל  $R$ .

**משפט 2.11** תהי  $L$  אלגברת לי מעל  $F$  (נניח כי  $\text{char} F = 0$ ). יהי  $V$  מודול ממימד סופי מעל  $L$  (ההצגה המתאימה), יהי  $J \subset L$  אידאל, ויהי  $\lambda \in J^*$ . נתבונן במרחב  $V_\lambda$  המתאים:

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \pi(x)(v) = \lambda(x)v \forall x \in J\}$$

אזי  $V_\lambda \subset V$  הוא תת מודול.

**הוכחה:** נניח כי  $V_\lambda \neq 0$ , כי אחרת אין מה להוכיח. יהי  $x \in L$ , ונרצה להראות כי  $\pi(x)(V_\lambda) \subset V_\lambda$ . נקח  $v_0 \in V_\lambda$ ,  $v_0 \neq 0$ . צריך להראות כי לכל  $y \in J$  מתקיים

$$\pi(y)(\pi(x)(v_0)) = \lambda(y)\pi(x)(v_0)$$

נסמן  $v_i = \pi(x)^i(v_0)$ . יהי  $k$  הטבעי הגדול ביותר עבורו  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  בלתי תלוי לינארית. נתבונן בתת המרחב שקבוצה זו פורשת ונסמנו  $V'$ . נראה כי  $V'$  אינווריאנטי לפעולת  $J$ . יהי  $y \in J$ . אזי

$$\begin{aligned} \pi(y)v_0 &= \lambda(y)v_0 \\ \pi(y)v_1 &= \pi(y)\pi(x)v_0 = \pi(x)\pi(y)v_0 + \pi([y, x])v_0 = \\ &= \lambda(y)v_1 + \lambda([y, x])v_0 \\ &\vdots \\ \pi(y)v_{i+1} &= \pi(y)\pi(x)v_i + \pi([y, x])v_i \end{aligned}$$

■

נמשיך בפעם הבאה.