

אלגבראות לי

© ארזים

11 במרץ 2019

1 מושגים ראשוניים

1.1 חבורות לי לינאריות

נמשיך מהמקום שעצרנו.

משפט 1.1 תהי $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ תת חבורה סגורה. נגדיר

$$L = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in G \forall t \in \mathbb{R}\}$$

אזי $L \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ היא תת-אלגברת לי.

הוכחה: ראינו כי בהינתן $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ יש $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $t \in \mathbb{R}$ עם $|t| < \varepsilon_0$ מתקיים

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = \exp\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + \sum_{j=3}^{\infty} t^j F_j(X, Y)\right)$$

כאשר $F_j(X, Y)$ הוא פולינום לא קומוטטיבי במשתנים X, Y הומוגני מדרגה j . כעת, יהי $t \in \mathbb{R}$ כלשהו. ניקח k טבעי עבורו $|\frac{t}{k}| < \varepsilon_0$, ונקבל כי

$$\begin{aligned} \left(\exp\left(\frac{t}{k}X\right)\exp\left(\frac{t}{k}Y\right)\right)^k &= \left(\exp\left(\frac{t}{k}(X+Y) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{t^j}{k^j} F_j(X, Y)\right)\right)^k = \\ &= \exp\left(t(X+Y) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{t^j}{k^{j-1}} F_j(X, Y)\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \exp(t(X+Y)) \end{aligned}$$

כעת יהיו $X, Y \in L$. כיוון שמתקיים $\exp(\frac{t}{k}X), \exp(\frac{t}{k}Y) \in G$ לכל k (ולכל t), מתקיים גם $(\exp(\frac{t}{k}X)\exp(\frac{t}{k}Y))^k \in G$, וכיוון שלקחנו G סגורה בתוך $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ נסיק כי לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\exp(t(X+Y)) \in G$$

ולכן בפרט $X+Y \in L$. מכאן נקבל כי L מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{R}$. סגורה ביחס להצמדה על ידי איברי G , כי אם $X \in L, g \in G$ אזי

$$G \ni g \cdot \exp(tX) \cdot g^{-1} = \exp(t(gXg^{-1}))$$

לכל $t \in \mathbb{R}$, ולכן $gXg^{-1} \in L$. יהיו $X, Y \in L$. נסמן

$$f(t) = \exp(tX) Y \exp(tX)^{-1}$$

ונשים לב כי $f(t) \in L$ לכל $t \in \mathbb{R}$. נגזור:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \exp(tX) X \cdot Y \exp(-tX) - \exp(tX) Y X \exp(-tX) = \\ &= \exp(tX) [X, Y] \exp(-tX) \end{aligned}$$

נציב $t = 0$ ונקבל

$$f'(0) = [X, Y]$$

ניזכר כי כפי שראינו בפעם הקודמת,

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\exp(tX) Y \exp(-tX) - Y)$$

כל האיברים בגבול בצד ימין נמצאים מתוך L , ולכן גם הגבול שלהם. בסך הכל קיבלנו כי $[X, Y] \in L$, כלומר L היא אכן תת-אלגברת לי. ■

1.2 אידאלים, הומומורפיזם ועוד

תהי L אלגברת לי מעל F . לתת מרחבים $U, V \subset L$ נסמן

$$[U, V] = \text{Span}_F \{[u, v] \mid u \in U, v \in V\}$$

הגדרה 1.2 תת-מרחב $J \subset L$ ייקרא **אידאל** (של L) אם $[J, L] \subset J$.

- תמיד קיימים האידאלים הטריביאליים $0, L$.
- סכום של אידאלים $I + J$ הוא כמובן אידאל.
- קומוטטור של אידאלים $[I, J]$ הוא גם כן אידאל - נראה את זה: יהיו $i \in I, j \in J, x \in L$ כלשהם. ניקח

$$[x, [i, j]] = [[x, i], j] + [i, [x, j]] \in [I, J]$$

בפרט, אם ניקח $[L, L]$ נקבל אידאל.

- יהי $f: L_1 \rightarrow L_2$ הומומורפיזם של אלגבראות לי. אזי $\ker f \subset L_1$ הוא אידאל: אם $x \in \ker f, y \in L_1$ נקבל

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)] = [0, f(y)] = 0$$

באופן כללי, אם $J \subset L$ אידאל, אז מוגדר מרחב המנה L/J . יש עליו מבנה של אלגברת לי לפי

$$[x + J, y + J] = [x, y] + J$$

זה מוגדר היטב כי J אידאל. כמובן שכעת מתקיימים משפטי ההומומורפיזם - למשל בדוגמה מהנקודה האחרונה קודם,

$$\begin{aligned} L_1 / \ker f &\simeq \operatorname{Im} f \\ x + \ker f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

כאיומורפיזם של אלגבראות לי. כמו כן, יש התאמה חד-חד-ערכית ועל בין האידיאלים $\ker f \subset I \subset L_1$ ובין האידיאלים $J \subset \operatorname{Im} f$, על ידי

$$\begin{aligned} I &\mapsto f(I) \\ f^{-1}(J) &\leftarrow J \end{aligned}$$

כאשר $J \subset L$ אידאל, ההומומורפיזם הטבעי

$$\begin{aligned} \nu(x) : L &\rightarrow L/J \\ \nu(x) &= x + J \end{aligned}$$

הוא הומומורפיזם על של אלגבראות לי.

דוגמא ראינו כי

$$\begin{aligned} \operatorname{ad} : L &\rightarrow \operatorname{Der}(L) \subset \operatorname{gl}(L) \\ \operatorname{adx}(y) &= [x, y] \end{aligned}$$

הומומורפיזם של אלגבראות לי. אזי

$$\begin{aligned} \ker(\operatorname{ad}) &= \{x \in L \mid \operatorname{adx} = 0\} = \\ &= \{x \in L \mid \forall y \in L [x, y] = 0\} \end{aligned}$$

זהו אידאל של L שנקרא גם **המרכז** של L , ונסמנו $\mathcal{Z}(L)$. בהינתן $H \subset L$ תת-אלגברת לי, נגדיר בנוסף גם את $C_L(H)$, או **המרכז** של H , להיות התת-אלגברה הבאה:

$$C_L(H) = \{x \in L \mid [x, h] = 0 \forall h \in H\}$$

וכן את $N_L(H)$, או **הנורמליזטור** (מנרמל) של H , להיות

$$N_L(H) = \{x \in L \mid [x, h] \in H \forall h \in H\}$$

כמובן, H אידאל בתוך $N_L(H)$.

הגדרה 1.3 L תקרא אלגברת לי **פשוטה** אם $[L, L] \neq 0$, ואין אידאלים לא טריביאליים בתוך L .

דוגמא $\mathfrak{sl}(2, F)$ פשוטה ($\text{char}(F) \neq 2$). נזכר כי יש לנו הבסיס

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

וכי ראינו שמתקיים

$$[h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h$$

כעת, יהי $I \subset \mathfrak{sl}(2, F)$ אידאל. $0 \neq ae + bf + ch \in I$, וניקח עליו קומוטטור עם e :

$$a \cdot 0 + b \cdot h - 2c \cdot e \in I$$

נעשה זאת שוב:

$$-2b \cdot e \in I$$

באותה צורה ניקח קומוטטור עם f פעמיים:

$$\begin{aligned} -ah + 2cf &\in I \\ 2af &\in I \end{aligned}$$

לכן, אם $a \neq 0$ או $b \neq 0$, נקבל כי אחד מבין e, f נמצא בתוך I , ולכן $[e, f] = h \in I$. אבל אז גם $[h, e] = 2e \in I$, $[h, f] = -2f \in I$ (היא הוא מכיל את הבסיס). כמובן שאם $a = b = 0$ אזי $c \neq 0$, ולכן $h \in I$ שוב. לכן קיבלנו שבכל $I = \mathfrak{sl}(2, F)$ מקרה.

1.2.1 אוטומורפיזמים

נניח כי $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ תת־אלגברת לי (לינארית). נתבונן בפעולת ההצמדה על $\mathfrak{gl}(V)$ על ידי $g \in \text{GL}(V)$:

$$X \mapsto gXg^{-1}$$

נניח (בהינתן g מסויים) שמתקיים $gLg^{-1} = L$. אזי ההצמדה באיבר g היא אוטומורפיזם של L : עבור $x, y \in L$ נקבל

$$g[x, y]g^{-1} = g(xy - yx)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) - (gyg^{-1})(gxg^{-1}) = [gxg^{-1}, gyg^{-1}]$$

למשל ניקח $L = \mathfrak{sl}(n, F) \subset \mathfrak{gl}(n, F)$. ידוע לנו כי עקבה נשמרת על ידי הצמדה, ולכן הצמדה בכל מטריצה $g \in \text{GL}_n(F)$ תשמר את $\mathfrak{sl}(n, F)$. כעת, נניח כי $\text{char} F = 0$, ותהי L אלגברת לי. נניח כי $\delta \in \text{Der}(L)$ ונניח כי δ היא אנדומורפיזם נילפוטנטי, כלומר יש k טבעי עבורו $\delta^k = 0$. נגדיר

$$\exp(\delta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \delta^j = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \delta^j$$

זאת העתקה לינארית הפיכה $L \rightarrow L$. נראה כי $\exp(\delta)$ היא אוטומורפיזם. מתקיים

$$\exp(\delta)([x, y]) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \delta^j([x, y])$$

מכלל לייבניץ נקבל

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} [\delta^r(x), \delta^{j-r}(y)] = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{r=0}^j \left[\frac{\delta^r(x)}{r!}, \frac{\delta^{j-r}(y)}{(j-r)!} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{r+i=j} \left[\frac{\delta^r(x)}{r!}, \frac{\delta^i(y)}{i!} \right] = \\ &= \left[\sum_{r=0}^{k-1} \frac{\delta^r(x)}{r!}, \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i(y)}{i!} \right] = [\exp \delta(x), \exp \delta(y)] \end{aligned}$$

את המעבר לשורה האחרונה צריך להסביר - הוספנו לכאורה מחוברים. נסתכל על

$$\sum_{r+i=m \geq k} \left[\frac{\delta^r(x)}{r!}, \frac{\delta^i(y)}{i!} \right] = \frac{1}{m!} \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \left[\frac{\delta^r(x)}{r!}, \frac{\delta^{m-r}(y)}{(m-r)!} \right] = \frac{1}{m!} \delta^m([x, y]) = 0$$

שכן $m \geq k$ ומתקיים $\delta^k = 0$.

בפרט נניח כי $x \in L$ עבורו adx היא נילפוטנטית - כלומר, לכל $y \in L$ מתקיים

$$[x, [x, [x, \dots, [x, y] \dots]] = 0$$

אזי

$$\exp(\text{adx}) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \text{ad}^j x$$

הוא אוטומורפיזם של L ונקרא אוטומורפיזם **פנימי** של L .

נקבל שתי חבורות חדשות: $\text{Aut}(L)$ היא חבורת כל האוטומורפיזמים של L . החבורה $\text{Int}(L) < \text{Aut}(L)$ היא תת החבורה הנוצרת על ידי כל האוטומורפיזמים הפנימיים של L .

טענה 1.4 $\text{Int}(L) \triangleleft \text{Aut}(L)$.

הוכחה: יהי $\phi \in \text{Aut}(L)$ ויהי $x \in L$ עבורו adx נילפוטנטי. מתקיים

$$\phi \exp(\text{adx}) \phi^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\phi \text{adx} \phi^{-1})^j$$

כעת, מתקיים

$$(\phi \operatorname{ad} x \phi^{-1})(y) = \phi(\operatorname{ad} x(\phi^{-1}(y))) = \phi([x, \phi^{-1}(y)]) = [\phi(x), y] = \operatorname{ad}(\phi(x))(y)$$

ולכן נקבל כי

$$\phi \operatorname{ad} x \phi^{-1} = \operatorname{ad}(\phi(x))$$

ומכאן

$$\phi \exp(\operatorname{ad} x) \phi^{-1} = \exp(\operatorname{ad}(\phi(x))) \in \operatorname{Int}(L)$$

■

דוגמא נניח כי $L = \mathfrak{gl}(n, F)$ ותהי $X \in \mathfrak{gl}(n, F)$ מטריצה נילפוטנטית, כלומר יש k טבעי עבורו $X^k = 0$. נחשב את $\exp(\operatorname{ad} X)$. נכתוב

$$\operatorname{ad} X(Y) = XY - YX = \lambda_X(Y) + \rho_{-X}(Y)$$

כאשר

$$\lambda_X(Y) = XY$$

$$\rho_X(Y) = YX$$

ברור כי מתקיים

$$\lambda_X \rho_{-X} = \rho_{-X} \lambda_X$$

ולכן

$$\exp(\operatorname{ad} X) = \exp(\lambda_X + \rho_{-X}) = \exp \lambda_X \exp \rho_{-X}$$

נציב מטריצה Y ונקבל

$$\exp(\operatorname{ad} X)(Y) = \exp \lambda_X \exp \rho_{-X}(Y)$$

על ידי פתיחת סוגריים פשוטה נקבל כי

$$\exp(\operatorname{ad} X)(Y) = \exp \lambda_X(\exp \rho_{-X}(Y)) = \exp X \cdot Y \cdot \exp(-X)$$

כלומר, $\exp(\operatorname{ad} X)$ היא למעשה הצמדה של $\exp X$.

1.3 מודולים והצגות

הגדרה 1.5 תהי L אלגברת לי מעל F . יהי V מרחב ווקטורי מעל F . נאמר כי V **מודול** מעל L אם יש פעולה של L על V , שנסמנה $x \cdot v \in V$ עבור $x \in L, v \in V$ (ונקרא לה כפל), כך שהכפל הזה בי-לינארי מעל F , וכך שלכל $x, y \in L, v \in V$ מתקיים

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$$

בהתאמה, נגדיר **הצגה** של L במרחב ווקטורי V בתור הומומורפיזם של אלגבראות לי

$$\pi : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

נניח כי V מודול מעל L . נגדיר את

$$\pi : L \rightarrow \text{gl}(V)$$

$$\pi(x)(v) = x \cdot v$$

אז π הצגה של L במרחב V לפי התכונות של מודול - למשל,

$$\begin{aligned} \pi([x, y])(v) &= [x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) = \pi(y)(\pi(x)(v)) - \pi(x)(\pi(y)(v)) = \\ &= [\pi(x), \pi(y)](v) \end{aligned}$$

בכיוון השני, תהי $\pi : L \rightarrow \text{gl}(V)$ הצגה של L . אזי V מודול מעל L לפי הכפל

$$x \cdot v = \pi(x)(v)$$

הגדרה 1.6 יהי V מודול מעל L . תת מודול $W \subset V$ הוא תת מרחב של V שהוא גם מודול מעל L בעצמו ביחס לאותה פעולה (W הוא תת מרחב של V שסגור לכפל באיברי L). בלשון הצגות, $W \subset V$ הוא תת מרחב אינווריאנטי לכל האופרטורים $\{\pi(x) \mid x \in L\}$.

W מגדיר הצגה של L במרחב W , שנשמנה π^W , על ידי

$$\pi^W(x) = \pi(x)|_W$$

על המרחב V/W יש מבנה של מודול מעל L (מודול מנה):

$$x \cdot (v + W) = x \cdot v + W$$

בהתאמה, יש לנו את הצגת המנה של L במרחב V/W . כמובן שגם הומומורפיזמים של מודולים מוגדרים באופן טבעי:

$$f : V_1 \rightarrow V_2$$

הומומורפיזם אם f היא העתקה לינארית ששומרת גם על הפעולה, כלומר

$$f(x \cdot v_1) = x \cdot f(v_1)$$

הגרעין והתמונה של הומומורפיזם הם כמובן תתי מודולים, ומשפטי ההומומורפיזמים מתקיימים.

הגדרה 1.7 מודול מעל L יקרא **אי־פריק** (Irreducible) אם אין לו תת מודולים לא טריביאליים. ההצגה המתאימה תקרא גם היא הצגה **אי־פריקה**.

הגדרה 1.8 מודול V מעל L ייקרא **פריק לחלוטין** (Completely Reducible או Semisimple) אם V הוא סכום ישר של תת מודולים אי־פריקים. ההצגה המתאימה תיקרא גם היא **פריקה לחלוטין**.

אם נפרט, הכוונה בהגדרה הפריקות לחלוטין היא שיש קבוצה $\{V_\alpha\}_{\alpha \in S}$ של תת מודולים אי־פריקים של V עברה

$$V = \bigoplus_{\alpha \in S} V_\alpha$$

כלומר לכל $v \in V$ קיימת תת קבוצה $S_v \subset S$ סופית עברה

$$v \in \bigoplus_{\alpha \in S_v} V_\alpha$$

1.3.1 דוגמאות ובניות כלליות של מודולים

1. הרחבת סקלרים: תהי L אלגברת לי מעל F . יהי $F \subset K$ שדה הרחבה, ויהי V מודול מעל L . כזכור יש לנו את $L_K = L \otimes_F K$ שהיא אלגברת לי מעל K . נגדיר

$$V_K = V \otimes_F K$$

וזהו מרחב ווקטורי מעל K . כעת, V_K הוא מודול מעל L_K . נראה זאת בקיצור - רק את הפעולה. עבור $x \in L, v \in V, t, s \in K$ נגדיר

$$(x \otimes t) \cdot (v \otimes s) = x \cdot v \otimes ts$$

כעת,

$$\begin{aligned} [x_1 \otimes t_1, x_2 \otimes t_2] \cdot (v \otimes s) &= ([x_1, x_2] \otimes t_1 t_2) (v \otimes s) = \\ &= [x_1, x_2] \cdot v \otimes ts = \\ &= (x_1 \cdot (x_2 \cdot v) - x_2 \cdot (x_1 \cdot v)) \otimes ts = \\ &= (x_1 \otimes t_1) \cdot ((x_2 \otimes t_2) \cdot (v \otimes s)) - (x_2 \otimes t_2) \cdot ((x_1 \otimes t_1) \cdot (v \otimes s)) \end{aligned}$$

2. L תמיד מודול מעל L , לפי $x \cdot y = [x, y]$ שהרי מתקיים

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] \cdot y &= [[x_1, x_2], y] = \\ &= -[y, [x_1, x_2]] = \\ &= [x_1, [x_2, y]] + [x_2, [y, x_1]] = \\ &= [x_1, [x_2, y]] - [x_2, [x_1, y]] = \\ &= x_1 \cdot (x_2 \cdot y) - x_2 \cdot (x_1 \cdot y) \end{aligned}$$

תתי המודולים של L מעל L הם בדיוק האידאלים של L . ההצגה המתאימה למודול הזה היא $\pi(x) = \text{ad } x$. אי פריק מעל L אם ורק אם $\dim_F L = 1$ או L אלגברת לי פשוטה.

3. המודול הדואלי למודול נתון: נתון מודול V מעל L . יהי V^* המרחב הדואלי למרחב V , כלומר

$$V^* = \text{Hom}_F(V, F)$$

נגדיר פעולה של L על V^* : בהינתן $x \in L, \varphi \in V^*$, נגדיר

$$(x \cdot \varphi)(v) = -\varphi(x \cdot v)$$

הפעולה הזו בבירור בי-לינארית, ולכן נבדוק רק את התנאי על הקומוטטור:

$$\begin{aligned} ([x, y] \cdot \varphi)(v) &= -\varphi([x, y] \cdot v) = -\varphi(x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)) = \\ &= -\varphi(x \cdot (y \cdot v)) + \varphi(y \cdot (x \cdot v)) = (x \cdot \varphi)(y \cdot v) - (y \cdot \varphi)(x \cdot v) = \\ &= (-y \cdot (x \cdot \varphi))(v) + (x \cdot (y \cdot \varphi))(v) = \\ &= (x \cdot (y \cdot \varphi) - y \cdot (x \cdot \varphi))(v) \end{aligned}$$

בלשון הצגות: ההצגה הדואלית להצגה π של L במרחב V היא ההצגה הבאה $\hat{\pi}$ של L במרחב V^* :

$$\hat{\pi}(x)(\varphi)(v) = -\varphi(\pi(x)(v))$$

4. מכפלה טנזורית של מודולים מעל L : נתונים שני מודולים V, W מעל אלגברת לי L . נתבונן במרחב הווקטורי (מעל F) $V \otimes_F W$. זהו מודול מעל L לפי

$$x \cdot (v \otimes w) = (x \cdot v) \otimes w + v \otimes (x \cdot w)$$

פעולה זו בבירור בי־לינארית. נבדוק את התכונה עם הקומוטטור:

$$\begin{aligned} [x, y] \cdot (v \otimes w) &= ([x, y] \cdot v) \otimes w + v \otimes ([x, y] \cdot w) = \\ &= (x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)) \otimes w + v \otimes (x \cdot (y \cdot w) - y \cdot (x \cdot w)) = \\ &= x \cdot (y \cdot v) \otimes w - y \cdot (x \cdot v) \otimes w + v \otimes x \cdot (y \cdot w) - w \otimes y \cdot (x \cdot w) \end{aligned}$$

באגף השני של השוויון יש לנו

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot (v \otimes w)) - y \cdot (x \cdot (v \otimes w)) &= x \cdot (y \cdot v \otimes w + v \otimes y \cdot w) - y \cdot (x \cdot v \otimes w + v \otimes x \cdot w) = \\ &= (x \cdot (y \cdot v)) \otimes w + \cancel{y \cdot v \otimes x \cdot w} + \cancel{x \cdot v \otimes y \cdot w} + v \otimes (x \cdot (y \cdot w)) - \\ &\quad - (y \cdot (x \cdot v)) \otimes w - \cancel{x \cdot v \otimes y \cdot w} - \cancel{y \cdot v \otimes x \cdot w} - v \otimes (y \cdot (x \cdot w)) = \end{aligned}$$

ונקבל שהגורמים שלא התבטלו הם אותם גורמים שקיבלנו בפיתוח של האגף הראשון, ולכן יש לנו את השוויון. בלשון הצגות: נניח כי π היא ההצגה במרחב V , σ ההצגה במרחב W , אזי ההצגה במרחב $V \otimes W$ תיקרא $\pi \otimes \sigma$ ותפעל לפי

$$(\pi \otimes \sigma)(x) = \pi(x) \otimes 1_W + 1_V \otimes \sigma(x)$$

5. יהיו V, W מודולים מעל L . נתבונן במרחב הווקטורי $\text{Hom}_F(V, W)$. זהו מודול מעל L לפי הפעולה

$$(x \cdot T)(v) = x \cdot T(v) - T(x \cdot v)$$

פעולה זו היא בבירור בי־לינארית. נבדוק את תכונת הקומוטטור:

$$\begin{aligned} ([x, y] \cdot T)(v) &= [x, y] \cdot T(v) - T([x, y] \cdot v) = \\ &= x \cdot (y \cdot T(v)) - y \cdot (x \cdot T(v)) - T(x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)) = \\ &= x \cdot (y \cdot T(v)) - y \cdot (x \cdot T(v)) - T(x \cdot (y \cdot v)) + T(y \cdot (x \cdot v)) \end{aligned}$$

כמו קודם, נפתח את האגף השני:

$$\begin{aligned} (x \cdot (y \cdot T))(v) - (y \cdot (x \cdot T))(v) &= x \cdot ((y \cdot T)(v)) - (y \cdot T)(x \cdot v) - y \cdot ((x \cdot T)(v)) + (x \cdot T)(y \cdot v) = \\ &= x \cdot (y \cdot T(v) - \cancel{T(y \cdot v)}) - \cancel{y \cdot T(x \cdot v)} + T(y \cdot (x \cdot v)) - \\ &\quad - y \cdot (x \cdot T(v) - \cancel{T(x \cdot v)}) + \cancel{x \cdot T(y \cdot v)} - T(x \cdot (y \cdot v)) \end{aligned}$$

וארבעת המחוברים הנותרים זהים למה שקיבלנו קודם. בלשון הצגות - נניח כי π היא ההצגה במרחב V , σ ההצגה במרחב W , אזי ההצגה במרחב $\text{Hom}_F(V, W)$ שנסמנה כרגע τ , היא

$$\tau(x)(T) = \pi(x) \circ T - T \circ \sigma(x)$$

תרגיל ידוע לנו האיזומורפיזם

$$V^* \otimes_F W \cong \text{Hom}_F(V, W)$$

המוגדר על ידי

$$\varphi \otimes w \mapsto T_{\varphi, w}$$

כאשר

$$T_{\varphi, w}(v) = \varphi(v) w$$

הראו שזהו גם איזומורפיזם של מודולים.

בהינתן הצגה π של L במרחב V ממימד סופי, נגדיר את התבנית הבאה על $L \times L$:

$$b_\pi(x, y) = \text{tr}(\pi(x) \circ \pi(y))$$

טענה 1.9 b_π היא תבנית בי-לינארית סימטרית מעל F (ברור) המקיימת

$$b_\pi(x, [y, z]) = b_\pi([x, y], z)$$

לכל $x, y, z \in L$.

את זה קל לבדוק בבית (ניעזר בזה שמתקיים $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. מקרה חשוב מאוד לקורס שלנו - כאשר $\pi = \text{ad}$, אז נסמן

$$b_\pi(x, y) = \kappa_L(x, y) = \text{tr}(\text{adx} \circ \text{ady})$$

תבנית זו נקראת **תבנית קילינג** (Killing).