חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

19 באפריל 2017

1 אינטגרציה על יריעות

דיברנו על נפח k מימדי של מקבילון שנפרש על ידי k וקטורים. המקבילון הוא

$$\pi\left(v_1,\ldots,v_k\right)=\left\{\sum t_iv_i\mid t_i\in[0,1]\right\}$$

הגדרה 1.1 יהיו $v_1,\ldots,v_k\in\mathbb{R}^n$. הנפח של המקבילון הנפרש על ידם הוא

$$\sqrt{\Gamma\left(v_1,\ldots,v_k\right)}=\sqrt{\det\left(\left(v_i,v_j\right)\right)_{i,j}}$$

1.1 מדידות ואינטגרביליות על יריעות

הגדרה 1.2 תת קבוצה $X\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת זניחה או (ממידה 0) אם לכל $\varepsilon>0$ קיים כיסוי בן מניה $X\subseteq\bigcup R_i$ על ידי תיבות R_i כך שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{\infty}v\left(R_i\right)<\varepsilon$$

הגדרה 1.3 תהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית. תת קבוצה $E\subseteq M$ נקראת <u>זניחה</u> בתוך M אם לכל מפה $r:V\to M$ הקבוצה $r^{-1}\left(E\right)$ זניחה בתוך $\mathbb{R}^k$.

תרגיל נניח כי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית, ותהי $E\subseteq M$ תת קבוצה. נניח שקיימת משפחה של מפות $\left\{r_\alpha:V_\alpha\to M\right\}_{\alpha\in I}$ שמקיימות $M\subseteq\bigcup r_\alpha\left(V_\alpha\right)$, וכן הקבוצה $r_\alpha^{-1}\left(E\right)\subseteq\mathbb{R}^k$ זניחה לכל α. אזי E זניחה בתוך M.

הגדרה 1.4 תהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית.

1. פונקציה $f:M\to\mathbb{R}$ נקראת אינטגרבילית רימן על M אם:

   (א) קבוצת נקודות אי הרציפות $B_f\subseteq M$ היא זניחה בתוך M.

(ב) f חסומה.

(ג) f בעלת תומך קומפקטי בתוך M.

2. קבוצה $E\subseteq M$ נקראת מדידה ז'ורדן בתוך M אם הפונקציה המאפיינות $\mathbb{1}_E:M\to\mathbb{R}$ היא אינטגרבילית רימן על M.

הגדרה 1.5 תהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית.

1. פונקציה $f:M\to\mathbb{R}$ נקראת <u>נוחה</u> אם יש לה תומך קומפקטי בתוך f וקיימת מפה $r:V\to M$ המקיימת $\operatorname{supp}(f)\subseteq r(V)$.

2. קבוצה $A\subseteq M$ נקראת <u>נוחה</u> אם $\mathbb{1}_A$ נוחה.

תרגיל תהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית. אזי קיים כיסוי $M=\bigcup U_\alpha$, כאשר כל U_α פתוחה יחסית בתוך M, נוחה, ומדידה ז'ורדן בתוך M.

טענה 1.6 תהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית. אזי כל פונקציה אינטגרבילית רימן אפשר לכתוב כסכום של מספר סופי של פונקציות נוחות אינטגרביליות רימן על M.

הוכחה: נסמן $K=\operatorname{supp}(f)\subseteq M$ קומפקטית. ניקח כיסוי $M=\bigcup U_\alpha$ כמו בתרגיל. אזי $K\subseteq U_\alpha$ כיסוי על ידי קבוצות פתוחות יחסית בתוך M, ולכן קיים כיסוי סופי

$$K\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}U_{\alpha_i}$$

כעת, נגדיר פונקציות $\varphi_i:M\to\mathbb{R}$ על ידי

$$\varphi_i(x)=\frac{\mathbb{1}_{U_{\alpha_i}}(x)}{\sum\limits_{j=1}^{m}\mathbb{1}_{U_{\alpha_j}}(x)}$$

עבור

$$x\in\bigcup_{i=1}^{k}U_{\alpha_i}$$

או $\varphi(x)=0$ אם x לא באיחוד. כעת, אם x באיחוד ברור כי

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x)=1$$

וכן כי $0\le\varphi_i(x)\le1$. כמו כן, φ_i מתאפסת מחוץ לקבוצה U_{α_i}, ולכן היא נוחה. כעת,

$$f=\sum_{i=1}^{m}f\varphi_i$$

על M. כמובן, $f\varphi_i$ מתאפסת מחוץ לקבוצה U_{α_i} ולכן נוחה. ■