

13/6/2018

הרצאה 12

היסטוריית רימן

משפט המספרים הראשוניים:

$$\pi(x) := \# \{ p \leq x \mid p \text{ ראשוני} \}$$

אומדן:

$$\pi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

1792 איס שילברג

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \text{Li}(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) / \text{Li}(x) = 1$$

"משפט המספרים הראשוניים"

הוכח 1896 * de la Vallée Poussin, Hadamard

x	$\pi(x)$	$\text{Li}(x) - \pi(x)$
10^8	5,761,455	754.
10^{10}	455,052,511	3104.
10^{12}	37,607,912,018	38263
10^{16}	279238341033925	3214632

השערה: "השערת רימן"

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^{1/2 + o(1)})$$

: Littlewood "1920"

$\text{Li}(x) - \pi(x)$ מחליף סימן אינסוף פעמים

: Skewes

שינוי הסימן הראשון $x > 10^{30}$

1858 ברנרד רימן חקר את $\pi(x)$ בעזרת פונקציה ζ

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{Re}(s) > 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) = \prod_{p \text{ ראשונים}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

הערה:

אם $\sum_n |a_n| < \infty$ אז $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ מתכנסת בהחלט

טענה:

בהינתן $L \neq 0$ קיים $L = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n)$

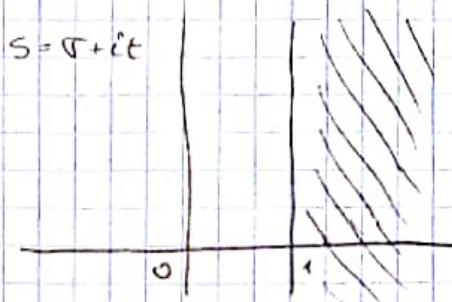
הסתרה:

$\operatorname{Re}(s) > 1$ מתכנסת בהחלט ואינה אפס עבור $\prod_{p \text{ ראשונים}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(s) > 0, \quad \frac{1}{1 - p^{-s}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ms}} \Rightarrow \prod_p = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots \right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{3^s} + \dots \right) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \quad \text{אם } a(n) = \# \{ n = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_r^{x_r} \} = 1 \end{aligned}$$

המספר היחיד של האורטוגונליות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$



הערה:

$\zeta(s) \neq 0$ אם $\operatorname{Re}(s) > 1$

רמז:

המשפט אנליטי של $\zeta(s)$ לכל $s \in \mathbb{C}$ פרט לקוטב פשוט ב-1.

הערה:

$\zeta(s)$ אנליטית עבור $\operatorname{Re}(s) > 1$ (כיום שמתכנס בהחלט ואינה אפס).
בכך חצי הישר, סבור, $\operatorname{Re}(s) \geq 1$.

פונקציות אלה

חשוב:

הפונקציה $\zeta^*(s) := \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$ היא אנליטית בכל $\mathbb{C}$, פרט

לנקודות פשוטות ב- $s=0, 1$. נקודות $\zeta^*(s) = \zeta^*(1-s)$.

הוכחה:

נכונה:

$$\operatorname{Re}(s) > 0, \quad \Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$$

המשכה אנליטית לכל $\mathbb{C}$ פרט לנקודות פשוטות ב- $s=0, -1, -2, -3, \dots$

$$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s), \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > -1$$

$$= \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s}, \quad \operatorname{Re}(s) > -2$$

$$\pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{\pi n^2}\right)^{s/2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\pi^{s/2} n^s} \int_0^\infty e^{-x} x^{s/2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\pi^{s/2} n^s} \Gamma(s/2)$$

$$\pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} \right) t^{s/2} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \omega(t) t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

$$\omega(t) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^\infty e^{-\pi n^2 t} - 1 \right) = \frac{1}{2} \theta(t)$$

המשכה (שמוכח):

$$\theta(1/t) = \sqrt{t} \theta(t)$$

$$\zeta^*(s) = \int_0^\infty \frac{\theta(t) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{\omega(t)}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{\omega(t)}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{\omega(t)}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

(כריף אור הוינערס)

$$\zeta^*(s) = \int_0^1 \omega(t) t^{s/2} \frac{dt}{t} + \underbrace{\int_1^\infty \omega(t) t^{s/2} \frac{dt}{t}}_{\text{דאס } + \text{ ווייניק}}$$

$$\omega(t) = \frac{\theta(t) - 1}{2} = \frac{\theta(1/t) - 1}{2}$$

$$\int_0^1 \omega(t) t^{s/2} \frac{dt}{t} = \int_0^1 \underbrace{\frac{\theta(1/t) - 1}{2}}_{\omega(x)} t^{s/2} \frac{dt}{t} + \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}} - 1}_{\text{דאס } + \text{ ווייניק}} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^1 \frac{\theta(1/t) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} \stackrel{x=1/t}{=} \int_1^\infty \underbrace{\frac{\theta(x) - 1}{2}}_{\omega(x)} x^{-s/2} \frac{dx}{x}$$

דאס ווייניק
 $\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} = ??$

$$\Rightarrow \zeta^*(s) = \underbrace{\int_1^\infty \omega(x) \left\{ t^{s/2} + t^{\frac{1-s}{2}} \right\} \frac{dt}{t}}_{\text{דאס } + \text{ ווייניק}} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$$

$\zeta^*(s)$ איז אן אינזשאן פאר $s \in \mathbb{C}$ וואס פארשט $s = 0, 1$

$$\zeta^*(1-s) = \zeta^*(s)$$



$s = 0, -2, -4, \dots$ - דאס פארשט $\Gamma(\frac{s}{2}) = 0$, $\zeta^*(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$

$s = -2, -4, -6, \dots$ - דאס פארשט $\zeta^*(s) = 0$

$\zeta(s)$ דאס "פארשט" $n = 1, 2, \dots$, $\zeta(-2n) = 0$

נוטא:

$\zeta(s) \neq 0$ פאר $\text{Re}(s) < 0$ און $\text{Re}(s) > 1$

דאס פארשט $\zeta^*(s)$ וואס פארשט $0 \leq \text{Re}(s) \leq 1$ און $\Gamma(s) \neq 0$ פאר $s \in \mathbb{C}$

השערת רימן:

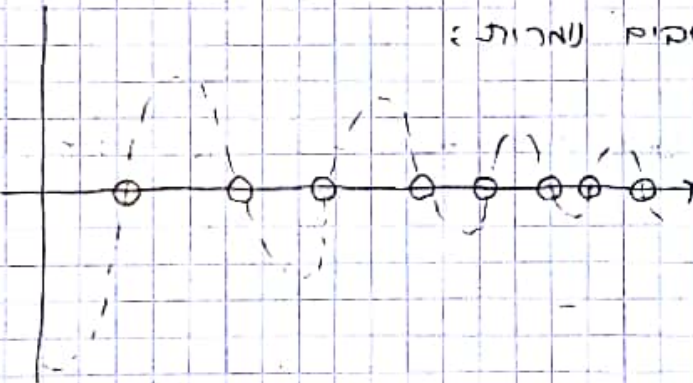
כל האפסים הנאי טרנזיטיוניים של ζ הם על ציר הסימטריה $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$



רימן חישב כל האפסים על $\frac{1}{2} + it$ עבור $|Im s| < 30$.
 $\frac{1}{2} + 21.02...i$, $\frac{1}{2} + 14.13...i$
 $\frac{1}{2} + 25.01...i$

מצבות אפסים:

האפסים אפסים של $\zeta(\frac{1}{2} + it)$.
 $Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta(\frac{1}{2} + it)$ נקראת פונקציית זיטה.
 כל $t \in \mathbb{R}$. האפסים נאמרים:



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(s)}{f(s)} ds = \text{מספר האפסים ב-} \gamma$$

האפסים של ζ הם טרנזיטיוניים. כל תחום סגור, אשר $\text{Re}(s) > 1$ (כלומר, $\text{Re}(s) > 1$), מכיל מספר סופי של אפסים.

הנוסחה הפונקציונלית המקורית (Approximate Functional equation):

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + O(x^{1-s}) + O\left(\frac{1}{t^{1-s}}\right)$$

$$s = \frac{1}{2} + it, \quad xy \ll t$$

הקשר בין $\zeta(s)$ לאפסים של $\pi(x)$

אפסים $\longleftrightarrow \pi(x)$ "הנוסחה המפורשת" של רימן
The explicit formula

יותר קל לספור חזקות ראשוניים בסימנים

$$\Psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p$$

תרשים:

$$\Psi(x) \sim x \iff \pi(x) \sim \text{Li}(x)$$

תרשים:

$$\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$$

תרשים:

$$\Psi(x) = \sum_{p \leq x} \log p + O(\sqrt{x})$$

תרשים:

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \iff \Psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

הנוסחה המפורשת של רימן:

$$\Psi(x) = x - \sum_{\gamma \neq 0} \frac{x^\gamma}{\gamma} - \frac{\sum'_{\gamma} (0)}{\gamma}$$

" π 2π γ $\log$

אם γ אדוניים בהשערת רימן כל האפסים אכן:

$$|\Psi(x) - x| \leq \sum \frac{|x^\gamma|}{|\gamma|} = \sum \frac{x^{\text{Re}(\gamma)}}{|\gamma|} \leq x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum \frac{1}{|\gamma|}$$

גסה סובית:

$$\Psi(x) = x - \sum_{\text{Im}(\gamma) = T} \frac{x^\gamma}{\gamma} + O\left(\frac{x}{T} \log^2(xT) + \log x\right)$$

נוסחת רימן - Von Mangoldt:

$$N(T) := \#\left\{ \gamma \mid \gamma(\rho) = 0, 0 < \text{Im}(\rho) < T \right\} \sim \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) + O(\log T)$$

$T \rightarrow \infty$

$$\delta(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & 0 < y < 1 \\ 1/2 & y = 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$I(y, T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{ds}{s}$$

דמיון:

$$|d(y) - I(y, T)| < \begin{cases} y^c \cdot \min(1, \frac{1}{T \log y}) \\ \frac{c}{T} & y = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n \leq x} a_n = \sum_{\substack{n=1 \\ c-i\infty}}^x a_n \delta\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^x a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \Leftrightarrow$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^x \frac{a_n}{n^s}\right)}_{!! A(s)} x^s \frac{ds}{s}$$

$$\text{תוצאה: } \text{Re}(s) > 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n=p^k \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} x^s \frac{ds}{s}$$

יישורים של השערת רימן (המוכנסת):

השערת באס - אורטן:

ב הובו שורש פרימיטיבי אדוארד פ, מאינסוף ראשוניים פ

$$\#\left\{ p \leq x \mid \begin{matrix} \text{2 שורש פרימיטיבי} \\ \text{פ אדוארד} \end{matrix} \right\} \sim C(2) \cdot \frac{x}{\log x}$$

$$C(2) \approx 0.37... = \prod_{p \text{ ראשוני}} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right)$$

1967 - Hooley הוכיח ש- GRH מוביל את השערת באס-אורטן

: Möbius פונקציה

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & n = p_1 \dots p_k \quad p_i \neq p_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) = \text{המספר בין מספר מסורתי וריבועי מסורתי} \\ \text{מסורתי מסורתי / מסורתי מסורתי} \\ \text{מסורתי מסורתי}$$

$$\text{PNT} \iff M(x) = o(x)$$

$$\text{RH} \iff M(x) \ll x^{1/2+\epsilon} \quad : \text{משערה}$$

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) = \int \underbrace{\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^s}}_{1/\zeta(s)} x^s \frac{ds}{s} \quad : \text{רמון}$$