חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

3 במאי 2017

1 נוסחת קו־שטח

נתון לנו על משטח $M\subseteq\mathbb{R}^n$ הנתון כגרף:

$$M=\left(x\in\mathbb{R}^n\mid x_n=h\left(x_1,\ldots,x_n\right),\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in W\right)$$

כאשר $h:W\to\mathbb{R}$, $W\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ פתוחה. נסמן בתור r את הפרמטריזציה הסטנדרטית $r\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)=\left(x_1,\ldots,x_{n-1},h\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)\right)$. נניח כמו כן כי M היא אוסף הפתרונות של $\phi\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0$, כאשר ϕ רגולרית על M. כעת, אם $f:M\to\mathbb{R}$ טובה מספיק (למשל אינטגרבילית רימן), ראינו שמתקיים

$$\int\limits_M f\,\mathrm{d}S=\int\limits_W\left(f\circ r\right)\cdot\sqrt{1+\left|\nabla h\right|^2}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-1}=\int\limits_W\left(f\circ r\right)\cdot\frac{\left|\nabla\phi\circ r\right|}{\left|\left(\phi\circ r\right)_{x_n}\right|}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-1}$$

משפט 1.1 יהי $V\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום. תהי $\phi:V\to\mathbb{R}$ חלקה ורגולרית, ונסמן $\phi\left(V\right)=\left(a,b\right)$. לכל $c\in\left(a,b\right)$ נגדיר

$$M_c=\phi^{-1}\left(c\right)$$

וזהו על משטח חלק. כעת, אם $f:V\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן עם תומך קומפקטי בתוך V, מתקיים

$$\int\limits_V f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b\mathrm{d}c\int\limits_{M_c}\frac{f\left(x\right)}{\left|\nabla\phi\left(x\right)\right|}\,\mathrm{d}S$$

הוכחה: ראשית ננסח ונוכיח טענה מקומית.

טענה 1.2 לכל נקודה $p\in V$ קיים $\delta_p>0$ כך שלכל פונקציה $f:V\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן עם $\mathrm{supp}f\subseteq B\left(p,\delta_p\right)$, המשפט נכון.

הוכחה: תהי $p \in V$. אזי $\nabla \phi (p) \neq 0$, ונניח בלי הגבלת הכלליות כי $\phi_{x_n} (p) \neq 0$. נגדיר את ההעתקה $F : V \to \mathbb{R}^n$ על ידי

$$F (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi (x_1, \ldots, x_n))$$

נחשב את היעקוביאן:

$$J_F (p) = \det \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ * & \phi_{x_n} \end{pmatrix}$$

ממשפט ההעתקה ההפוכה, קיימת סביבה $p \in V' \subseteq V$ כך שהצמצום $F |_{V'}$ הוא דיפאומורפיזם לתמונתו. אפשר להניח $F (V') = W \times (a', b')$, כאשר $W \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ תובה פתוחה, $a \leq a' < b' \leq b$. נסמן

$$G = (F |_{V'})^{-1} : F (V') \to V'$$

ונסמן

$$G = (x_1, \ldots, x_{n-1}, c) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, \psi (x_1, \ldots, x_{n-1}, c))$$

כאשר $\psi : W \times (a', b') \to \mathbb{R}$. אם נניח כי $\operatorname{supp} (f) \subseteq V$ נקבל

$$\begin{aligned} \int\limits_V f (x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_{V'} f (x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_{F(V')} (f \circ G) |J_G| \, \mathrm{d}x = \\ = \int\limits_{W \times (a', b')} f \circ G (x_1, \ldots, x_{n-1}, c) \cdot \frac{1}{|J_F (G (x_1, \ldots, x_{n-1}, c))|} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1} \mathrm{d}c \end{aligned}$$

ממשפט פוביני נקבל שהשוויון הזה ממשיך:

$$\int\limits_V f (x) \, \mathrm{d}x = \cdots = \int\limits_{a'}^{b'} \mathrm{d}c \int\limits_W \frac{f \circ G (x_1, \ldots, x_{n-1}, c)}{|\phi_{x_n} (G (x_1, \ldots, x_{n-1}, c))|} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1}$$

לכל c קבוע, ההעתקה $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto G (x_1, \ldots, x_{n-1}, c) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, \psi (x_1, \ldots, x_{n-1}, c))$ היא העתקה $W \to \mathbb{R}^n$ - כלומר מפה של היריעה M_c שנתונה בצורת גרף. כעת,

$$G \circ F (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

אם כן,

$$\begin{aligned} G \circ F (x_1, \ldots, x_n) = G (x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi (x_1, \ldots, x_n)) = \\ = (x_1, \ldots, x_{n-1}, \psi (x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi (x_1, \ldots, x_n))) \end{aligned}$$

ומכאן $x_n = \psi\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)$.
כעת,

$$M_c \cap V' = \left\{G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right) \mid \left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right) \in W\right\}$$

יש לנו הצגה סתומה בגלל ההגדרה של M_c בתור $\{\phi = c\}$. המקדם Γ עבור המפה שלנו, כאשר c קבוע, הוא

$$\Gamma = \frac{\left|\nabla\phi\left(G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right)\right)\right|}{\left|\phi_{x_n}\left(G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right)\right)\right|}$$

אם כן,

$$\begin{aligned}
\int\limits_V f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{a'}^{b'} \mathrm{d}c \int\limits_W \frac{f \circ G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right)}{\left|\phi_{x_n}\left(G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right)\right)\right|}\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1} = \\
&= \int\limits_{a'}^{b'} \mathrm{d}c \int\limits_W \frac{f \circ G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right)}{\left|\nabla\phi\left(G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right)\right)\right|} \frac{\left|\nabla\phi\left(G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right)\right)\right|}{\left|\phi_{x_n}\left(G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right)\right)\right|}\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \\
&= \int\limits_{a'}^{b'} \mathrm{d}c \int\limits_{M_c} \frac{f}{|\nabla\phi|}\,\mathrm{d}S = \int\limits_a^b \mathrm{d}c \int\limits_{M_c} \frac{f}{|\nabla\phi|}\,\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

■

■