

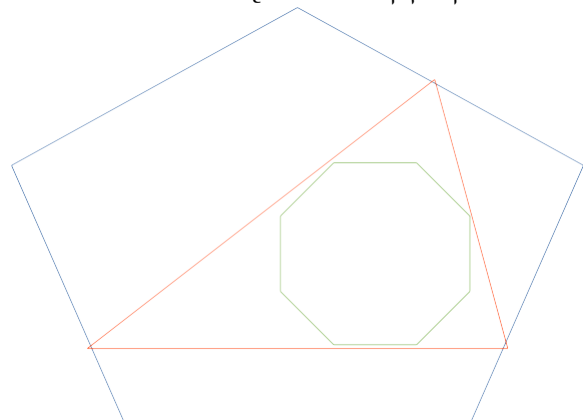
הרצאה 6

15 במאי 2017

סימפליפיקציות:

בעיית דו - מימדית: נתונים שני פוליגונים **קמורים** P, Q מכיל את Q .
אנו רוצים למצוא פוליגון שמקוון ביניהם, כאשר מספר קודקודיו מינימלית.

הגדרה 0.1 פוליגון מקוון - מכיל את Q ומוכל ב P



הגדרה 0.2 פוליגון מקוון מינימלי - לא קיים פוליגון מקוון עם כמות קודקודים קטנה ממנו.

הגדרה 0.3 קטע ישר תומך

קטע שמשיק ל Q בשפה (ואינו נכנס אליו), ונשען בשתי נקודות על P

הגדרה 0.4 קטע ישר תומך של נקודה על שפת P , l_a ושטחו R_a

נשים לב שכאשר ניקח נקודה A על שפת P הקטע הישר התומך שיוצא ממנו מוגדר באופן יחיד (אנו הולכים תמיד נגד כיוון השעון) כמו כן נסמן את השטח שחסום בין הישר לבין Q ב R_a

למה 0.5 פוליגון מקוון מינימלי הינו קמור.

זאת משום שבהנחה שיש לנו פוליגון קמור מינימלי שאינו קמור.

ניקח את הקמור שלו, נשים לב שהוא מוכל ב P משום ש P קמור, וכן איבדנו לפחות נקודה אחת משום שאחרת נקבל סתירה להיותו לא קמור.

הקמור של הפוליגון מהווה פוליגון מקוון עם כמות קודקודים נמוכה ממנו, בסתירה להיותו פוליגון מקוון מינימלי.

למה 0.6 R_a חייב להכיל לפחות קודקוד אחד של כל פוליגון מקוון

הגדרה 0.7 פוליגון תומך

ניקח נקודה a_0 על שפת P וניקח את הקטע הישר התומך שלה, ניקח את הקצה שלה a_1 ונחזור על התהליך. בסוף יקרו אחד משני מקרים:
(א) הקטע האחרון יתחבר בדיוק לתחילת הקטע הראשון
(ב) הקטע האחרון לא יתחבר ונצטרך להוסיף קטע נוסף שיסגור את הפוליגון התומך

נשים לב שבכל R_{a_i} חייב להיות קודקוד של פוליגון מקוון, עבור כל פוליגון מקוון. במקרה (א) סיימנו משום שחייבים להיות בכל פוליגון מקוון לפחות כמות קודקודים כמו שיש לנו (אחד לכל R_{a_i}) ומכאן שמצאנו פוליגון מקוון מינימלי

למה 0.8 מכאן שלכל $a_0 \in P$ מתקיים כי ל S_{a_0} (הפוליגון התומך של a_0) יש לכל היותר קודקוד אחד יותר מלפוליגון המינימלי.

למה 0.9 לכל פוליגון מינימלי M נוכל להפוך את M לפוליגון תומך מבלי לשנות את כמות הקודקודים

ניקח צלע $v_1 v_2$ ונדחוף את v_2 לשפת P ונסמנה v'_2
כעת ניקח את צלע $v'_2 v_3$ ונדחוף את v_3 לשפת P ונסמנה v'_3
ונחזור על התהליך עד שנסיים עם כל הצלעות
בסוף התהליך קיבלנו פוליגון תומך
כעת ניקח צלע $v'_1 v'_2$ וניקח את קודקוד v'_2 ונסיע אותו (נגד כיוון השעון), על שפת Q עד שהצלע שלנו תשיק ל P נסמנה v''_2 .
ונחזור על התהליך עד שנסיים עם כל הסגמנטים (אולי מלבד האחרון), כעת גם כל הסגמנטים שלנו הם סגמנטים תומכים.

אלגוריתם: מטרתנו: לבדוק האם ניתן לצמצם באמת בקודקוד אחד (קיימת הזזה של הפוליגון שלנו כך שזוג קודקודים מתאחדים, או שזוהו לא המצב)

כעת נרצה עבור צלע $v_1 v_2$, להסיע את v_1 על פני הצלע שהוא משיק לה ב P ולחשב איפה תיהיה v_2 בהתאם. הנוסחה היא שתקבל ממשחק עם טריגונומטריה

$$x_2 = \left(\frac{c_1 + c_2 x_1}{c_3 + c_4 x_1} \right)$$

עבור קבועים c_1, c_2, c_3, c_4
אם נמשיך לפתח את הטריגונומטריה עבור x_3 ונקבל

$$x_3 = \left(\frac{d_1 + d_2 x_2}{d_3 + d_4 x_2} \right)$$

ובפרט

$$x_3 = \left(\frac{e_1 + e_2 x_1}{e_3 + e_4 x_1} \right)$$

הנוסחה הזאת משתנה בשלוש מקרים -

1. v_i מגיעה לקצה קטע ב P

2. v_{i+1} מגיע לקצה קטע ב P

3. הקטע $v_i v_{i+1}$ משנה קטע השקה ב Q

נסתכל על שלושת האירועים האלו, וניקח את הקרוב ביותר מביניהם

נעשה זאת צלע צלע, ונבדוק את ערך השינוי הנמוך ביותר וניקח אותו.

כעת ניקח את כל הקודקודים ונזיז אותם בערך שמצאנו

לאחר שעשינו את זה נעדכן את הפונקציות של כל הצלעות $O(k)$ כאשר k כמות הצלעות בפוליגון שהתחלנו איתו.

כעת נחזור על התהליך עד שנחזור להתחלה

בכל שלב נבדוק אם קיבלנו שני קודקודים התאחדו, אם כן סיימנו, ונחזיר את הפוליגון שקיבלנו.

אם זה לא קרה לאורך כל התהליך נוכל להסיק שלא קיים פוליגון כזה ולכן נחזיר את אחד מהפוליגונים הקדומים שהגענו אליהם.

סיבוכיות:

1. איתחול המערכת, עבור קודקוד A על שפת Q מציאות הצלע P בו הוא משיק ביצירת הקטע התומך שלו ומציאת הפוליגון התומך $O(n)$
2. חישוב הקבועים בנוסחאות עבור צלעות הפוליגון התומך $O(k)$
3. contact changes הטיול סביב פוליגון Q והמעבר לפי הפונקציות $O(n)$
4. לכל מעבר (3), עידכון הנוסחאות $O(k)$
סך הכל $O(nk)$
(אפשר לשפר את האלגוריתם ל $O(n \log k)$)