

הדפסת תלת מימד שיעור 4

4 באפריל 2017

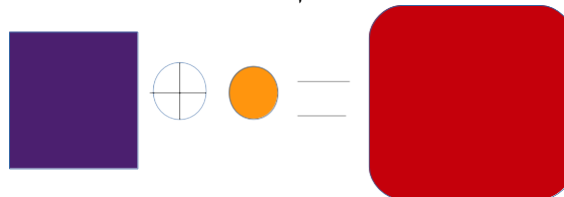
סכומי מינקובצקי: חזרה:

סכום מינסובסקי של זוג נקודות: $\{(x_1, y_1)\} \oplus \{(x_2, y_2)\} = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\}$
 סכום מינקובסקי של זוג פוליהדרונים: $A \oplus B = \{a \oplus b | a \in A, b \in B\}$

- לכל כיוון, ניקח נקודה ב- P_1 הרחוקה ביותר בכיוון זה וכן נקודה רחוקה ביותר ב- P_2 בכיוון זה, נחבר אותם ונקבל את הנקודה הרחוקה ביותר בכיוון זה ב- $P_1 \oplus P_2$

- סכום מינקובסקי של פוליגונים קמורים הוא קמור

דוגמה ויזואלית לסכום מינסובסקי:



- במישור נקבל $m + n$ קודקודים בסכום מינסובסקי
 - במרחב נקבל $m \cdot n$ קודקודים בסכום מינסובסקי
 - מפת גאומטרית נותנת בדיוק את הקודקוד הקיצוני של כל פוליגון בכל כיוון, אם נשים מפות גאומטריות של שני פוליגונים אחת על השנייה, נקבל בדיוק את הקודקוד הקיצוני ביותר בכל כיוון אותם יש לחשב וככה נוכל בקלות לחשב את סכום מינסובסקי שלהם (של פוליגונים קמורים).
- אפשר ללמוד יותר על חישוב מפת גאומטרית בתזה של ד"ר אפי פוגל, יעלה לאתר רפרנס.

טענה 0.1 אם נקבל שתי קבוצות A, B הן נחתכות אם ורק אם סכום מינסובצקי $A \oplus (-B)$ מכיל את הראשית, כאשר B הינו שיקוף דרך הראשית

$$(a_x, a_y) = (b_x, b_y) \iff (0, \dots, 0) \in A \oplus (-B) \iff A \cap B \neq \emptyset$$

אזי מתקיים $0 = (a_x - b_x, a_y - b_y) \in A \oplus (-B)$ נניח שמתקיים $0 \in A \oplus (-B)$ אזי מתקיים שקיימות זוג נקודות $(a_x, a_y), (b_x, b_y)$ שמקיימות $(a_x - b_x, a_y - b_y) = (0, 0)$ ומכאן שמתקיים $a_x = b_x, a_y = b_y$

■

חזרה לעומק חדירה: עבור A, B פוליהדרונים ב- $\mathbb{R}^3$ המרחק המינימלי שצריך להזיז את A בכיוון כלשהו כדי שהחיתוך ביניהם יהיה ריק

$$\pi(A, B) = \min \{ \|t\| \mid \text{int}(A + t) \cap B = \emptyset, t \in \mathbb{R}^3 \}$$

איך נחשב את עומק החדירה של שני פוליהדרונים קמורים בתלת מימד

1. קודם כל נבדוק האם הם נחתכים, אם לא התשובה היא 0 (עושים זאת על ידי בעיית תכנות לינארי לפי חיתוך של חצאי מרחבים שיוצרים הפאות שלהם)
2. אנו יודעים כי A, B נחתכים, זאת אומרת בפרט הסכום $(-A) \oplus (B)$ מכיל את הראשית, כעת נחפש וקטור t כך שזיז את A ונוציא את הראשית מסכום מינקובסקי, אזי נסתכל על הראשית ונחפש את הדרך הכי קצרה ממנה החוצה מסכום מינקובסקי.
3. נעבור פאה פאה, ונראה את המרחק בין נקודת הראשית לפאה (במאונך לפאה), ונבחר את המרחק המינימלי, וכך נקבל את עומק החדירה.

אנחנו רוצים לתאר אלגוריתם קירוב לחישוב הרחוק, אנחנו מקבלים קובץ ϵ ונחזיר רוחב עם טעות עד ϵ על מפת הגאומטריות S^2 נשים גריד צפוף שהמרחק בין זוג נקודות בגריד הן $\sqrt{\epsilon}$ (ברדיאנים), כך שהמרחק של כל נקודה בכדור מנקודה בגריד הוא לכל היותר $\sqrt{\epsilon}$.

כעת ניקח כל נקודה על הגריד ונשאל מה עומק החדירה בכיוון זה, ניקח את התוצאה הקטנה ביותר וטוען שזהו w' שמקיים $w' \leq w + \epsilon$

הסיבה שזה מתקיים היא:
 v הוקטור שמגדיר את העומק
 u הוקטור הקרוב אליו ביותר על הגריד (זה שחישבנו)

$$\|u\| \leq \frac{\|v\|}{\cos \alpha} \leq \frac{\|v\|}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} \leq (1 + \alpha^2) \|v\| \leq (1 + \varepsilon) \|v\|$$

סיבוכיות:

$$O\left(m + n + \frac{\log^2(m + n)}{\varepsilon}\right)$$

שתי הערות:

1. הקאץ' בסיפור הוא איך בהינתן כיוון אחד ספציפי לחשב את עומק החדירה בלי לחשב את כל סכום המינקובסקי, זה לא ניתן להפקה ביעילות ממפת הגאוסיינים, כדי לעשות פעולה זאת ביעילות אנו צריכים להשתמש במבנה מתוחכם, שעובד בזמן $\log^2(m + n)$
2. למה חישבנו עומק ולא רוחב, הטענה שלמעלה לא בהכרח נכונה על רוחב...