

אתר אונבר - ilag@post.tau.ac.il תא - 219

הצגות עם נאמנות על מתמטיקה, לכן שאלות על מנהלה (אודות ההצגות וגם...)

הזמנה - כ- 700, הזמנה בימי שלישי, ערב או אחר, יום שלישי - 15:00

לכן יחולו סיכומים מסודרים, הם יתן דומים עם שנים קודמות

אנטיגם על מסומים ופונקציה קצומה

הצגה - $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ תהיה קצומה של f - I אם $f(x) = F'(x) \forall x \in I$.

$$\int f(x) dx = \{ F: I \rightarrow \mathbb{R} \mid F' = f \}$$

טענה - אם F_1, F_2 קצומות של f , הן נבדלות בקבוע: $F_1 = F_2 + c$

משפט דרבו - תהי $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה. אזי F' היא תכונה ערך הביניים

הסקנה - אם $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה, אז F' היא תכונה ערך הביניים. I

הקנה - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\{u\} = \{u\}$ אין קצומה ב- $\mathbb{R}$
 (עם שני של מקיימת את תכונת ערך הביניים בקטע I)

הקנה - כשהחשבים קצומה f מספר, אחרת נצב מהחשקה $\int f(x) dx$

$$\int f(x) dx = F + c$$

אנטיגםים בסטיות

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c \quad (1)$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (2) \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c \quad (3)$$

$$\int e^x dx = e^x + c \quad (4)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad (5)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c \quad (7)$$

דוגמאות

$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1] \\ 0 & x \in (1,2) \end{cases}$ ← אין קצומה, כי בתחום תכונה ערך הביניים.

משפט - אם f רציפה ב- I , קיימת קצומה ב- I

טענה - אינטגרל על מסומים הוא פונקציה איטוארית

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - 2 \int \frac{1}{x} dx + \int dx =$$

$$= -\frac{1}{x} - 2 \log|x| + x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x+1 - (x-1)} dx = \frac{1}{2} (\int \sqrt{x+1} dx - \int \sqrt{x-1} dx) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} (x+1)^{3/2} - \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} \right) + c$$

$$\int \frac{x^3-1}{x-1} dx = \int \frac{x^2+x+1}{x-1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + c$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2) + c$$

$$\frac{f'}{f} = (\ln|f|)' \quad \text{אילו } f \neq 0 \quad \text{כך נכתב}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f| + c$$

2 תוצאות

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

הצורה הבאה

$$\int f \cdot g' = fg - \int f'g$$

$$\text{כלומר, } f'g \text{ ו } fg \text{ נכתבו}$$

הצורה הבאה

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + c$$

$$\begin{aligned} \int \arctan x dx &= x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = x \cdot \arctan x - \int \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{e^x}{f} \frac{f'}{g'} dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x = e^x \sin x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx)$$

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I$$

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$

החלפת משתנים

f קצומה של F , $a, b \in \mathbb{R}$, $\int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$

למשל: f הוא פונקציה קצומה של $F(x) = \int f(x) dx$. עבור פונקציה g נטורה:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x))$$

$$t = g(x), \quad dt = g'(x) dx$$

סימון:

החלפת משתנים:

$$\begin{aligned} \int (x-1)^{100} x dx &= (x-1=t, dx=dt \rightarrow x=t+1) \\ &= \int t^{100} (t+1) dt = \int t^{101} + t^{100} dt = \frac{t^{102}}{102} + \frac{t^{101}}{101} + c = \\ &= \frac{(x-1)^{102}}{102} + \frac{(x-1)^{101}}{101} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (2x+1)^{10} dx &= (t=2x+1, dt=2dx \rightarrow dx=\frac{dt}{2}) \\ &= \int \frac{1}{2} t^{10} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{11}}{11} + c = \frac{(2x+1)^{11}}{22} + c \end{aligned}$$

החלפת משתנים "בכיוון ההפוך"

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x))$$

$$\int f(t) dt = F(t)$$

אם $t=g(x)$ נטורה, $x=g^{-1}(t)$ ונקבל:

החלפת משתנים:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} &= (x=t^2, dx=2t dt) \\ &= \int \frac{2t dt}{(1+t^2)^3} = \int \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \arctan t + c \end{aligned}$$

תוצאה:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \ln x} &= (t=\ln x, dt=\frac{dx}{x} \rightarrow dx=x dt) \\ &= \int \frac{x dt}{x t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\ln x| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 (x^3+2)^{4/5} dx &= (t=x^3+2 \rightarrow x=(t-2)^{1/3}, dt=3x^2 dx, dx=\frac{1}{3}(t-2)^{-2/3} dt) \\ &= \int (t-2)^{2/3} \cdot t^{4/5} \cdot \frac{1}{3}(t-2)^{-2/3} dt = \frac{1}{3} \int t^{4/5} dt = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{5} t^{9/5} + c = \frac{5}{18} (x^3+2)^{9/5} + c \end{aligned}$$