מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

20 במרץ 2016

1 אי־תלות

ראינו את ההגדרה לאי תלות של שני מאורעות ־ קיום השוויון

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$

וראינו שהוא גורר שלושה נוספים:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B^{c}) &= \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B^{c})\\ \mathbb{P}(A^{c}\cap B) &= \mathbb{P}(A^{c})\cdot\mathbb{P}(B)\\ \mathbb{P}(A^{c}\cap B^{c}) &= \mathbb{P}(A^{c})\cdot\mathbb{P}(B^{c})\end{aligned}$$

וראינו גם את ההגדרה עבור n מאורעות, עם 2^n שוויונות.

1.1 בעיית מונטי הול

בתוכנית טלוויזיה יש 3 דלתות שרק מאחורי אחת יש פרס, בהסתברות שווה לכל דלת. לאחר שהמתמודד בוחר דלת, המנחה פומח דלת שלא מכילה את הפרס ומאפשר למתמודד להחליף את בחירתו המקורית. מהי האסטרטגיה האופטימלית ־ להחליף או להישאר עם הבחירה המקורית?

<u>פתרון:</u> נגדיר את מרחב ההסתברות של הבעיה באופן הבא:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i,j,k)\mid i,j,k\in\{1,2,3\}\}\\ \mathbb{P}(i,j,k) &= \begin{cases}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} & i=j,k\neq i,j\\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 & i\neq j,k\neq i,j\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned}$$

נניח, בלי הגבלת הכלליות $i=1,k=3$. נחשב את ההסתברות לזכות אם נחליף לדלת 2

ואם נשארים בדלת 1.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(switch \mid \bigcup_{j=1}^{3}(1,j,3)\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(switch\cap\left(\bigcup_j(1,j,3)\right)\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_j(1,j,3)\right)}=\\ &= \frac{\mathbb{P}(1,2,3)}{\mathbb{P}(1,1,3)+\mathbb{P}(1,2,3)+\mathbb{P}(1,3,3)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}+\frac{1}{18}}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

לכן נובע באופן מיידי

$$\mathbb{P}\left(stay \mid \bigcup_{j}(1,j,3)\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

הסבר אינטואיטיבי - נניח שבחרנו בדלת 1, נבדוק באילו מקרים זכייה תתאפשר לאחר החלפה. או שהמכונית בדלת 3, המנחה יפתח את דלת 2 וההחלפה מזכה אותנו במכונית; או שהמכונית בדלת 2, המנחה יפתח את דלת 3 וההחלפה תזכה אותנו במכונית; או שהמכונית בדלת 1, ואז לא משנה איזו דלת יפתח המנחה, החלפה לא תזכה אותנו במכונית.

<u>תרגיל:</u> בספריה 10 ספרי הסתברות, חמישה עם פתרונות וחמישה בלי. הספרנית, בפרץ כעס לא ברור, השמידה ספר באקראי. אלון מגיע לספרייה, לוקח ספר באקראי ומחזיר אחרי שבוע. בן מגיע אחרי חודשיים, ולוקח ספר באקראי. A - הספר שלקח אלון כלל פתרונות. B - הספר שלקח בן כלל פתרונות. האם A,B תלויים?

<u>פתרון:</u> נחשב מפורשות את ההסתברויות. נגדיר C - הספר שהושמד כלל פתרונות. כעת,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A\mid C)\cdot\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(A\mid C^c)\cdot\mathbb{P}(C^c)=\\ &= \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

אותו חישוב עובד להסתברות של B (הגיוני- זה אותו ניסוי).

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(A\cap B\mid C)\cdot\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(A\cap B\mid C^c)\cdot\mathbb{P}(C^c)=\\ &= \frac{16}{81}\cdot\frac{1}{2}+\frac{25}{81}\cdot\frac{1}{2}=0.253\cdots>\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

אין שוויון, ולכן אין גם תלות.

2 שאלות שונות

<u>תרגיל:</u> בקופסא יש 3 כדורים שחורים, 4 אדומים ועוד 93 לבנים. מוציאים כדור בכל שלב עם החזרה עד שיוצא כדור שאינו לבן.

1. מה הסיכוי שהתהליך יימשך לנצח?
2. מה ההסתברות שהתהליך יסתיים בהוצאת כדור אדום?

פתרון: נגדיר מאורעות - לכל k טבעי, W_k- ההוצאה שמספרה k היא כדור לבן, R_k - ההוצאה שמספרה k היא כדור אדום. בסעיף הראשון נרצה למצוא את

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} W_k\right) &= \lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} W_k\right)=\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\left(W_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(W_1\mid W_2\right)\cdot\ldots\mathbb{P}\left(W_N\mid\bigcap_{k=1}^{N-1} W_k\right)= \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{93}{100}\right)^N=0\end{aligned}$$

בסעיף השני נסמן את המאורע המבוקש בתור R.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(R\right) &= \mathbb{P}\left(R_1\right)+\mathbb{P}\left(R_2\cap W_1\right)+\cdots=\mathbb{P}\left(R_1\right)+\sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{P}\left(R_k\mid\bigcap_{n=1}^{k-1} W_n\right)\cdot\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{k-1} W_n\right)= \\ &= \frac{4}{100}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\left(\frac{93}{100}\right)^{k-1}\cdot\frac{4}{100}\right)=\frac{4}{100}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{93}{100}\right)^{k-1}=\frac{4}{100}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{93}{100}\right)^{k}= \\ &= \frac{4}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{93}{100}}=\frac{4}{7}\end{aligned}$$

תרגיל: (סמסטר ב, תשע"ד) לבן מטבע כחול ולאלון מטבע אדום. למטבע הכחול הסתברות p ליפול על עץ, ולאדום הסתברות q ליפול על עץ. הם משחקים את המשחק הבא:בכל תור מטיל כל אחד את המטבע שבידו. אם מתקבל עץ-עץ, מחליפים מטבעות, אחרת נשארים כל אחד עם המטבע שלו. כעת משחקים שוב. לכל n טבעי, A_n - בתום n סיבובים לאלון מטבע אדום.

1. חשבו את $\mathbb{P}\left(A_2\right)$.
2. עבור אילו ערכי p,q זוג המאורעות A_2,A_3 בלתי-תלויים?

פתרון:

.1

$$\mathbb{P}\left(A_2\right)=\left(pq\right)^2+\left(1-pq\right)^2=2pq^2-2pq+1$$

2. דרך א:

$$\mathbb{P}\left(A_2\cap A_3\right)=\mathbb{P}\left(A_2\right)\cdot\mathbb{P}\left(A_3\right)$$

דרך ב: נבדוק מתי

$$\mathbb{P}\left(A_3\mid A_2\right)=\mathbb{P}\left(A_3\right)$$

שכן זה שקול לאי תלות. נחשב כל אגף בנפרד. נסמן $pq=\alpha$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A_3 \mid A_2\right) &= 1-\alpha \\ \mathbb{P}\left(A_3\right) &= (1-\alpha)^3+3\cdot\alpha^2(1-\alpha)=-2\alpha^3+3\alpha^2\end{aligned}$$

לכן נרצה לדרוש

$$1-\alpha=(1-\alpha)^3+3\alpha^2(1-\alpha)$$

פתרון ראשון - $\alpha=1$ כלומר $p=q=1$. אם $\alpha\neq 1$ נחלק ונקבל

$$\begin{aligned}1 &= (1-\alpha)^2+3\alpha^2 \\ 0 &= \alpha(2\alpha-1)\end{aligned}$$

לכן שני פתרונות נוספים הם - $\alpha=0$, כלומר $p=q=0$, או $\alpha=\frac{1}{2}$.

<u>תרגיל:</u> יהי $n\geq 10$. מסדרים את המספרים עד n בסדר מקרי שנבחר באופן אחיד מכל הסידורים. A_i - המספר שמספרו בשורה i גדול מכל קודמיו, $2\leq i\leq n$.

1. $\mathbb{P}\left(A_i\right)=?$

2. המאורעות A_7,A_2,A_3 הם: בלתי־תלויים, תלויים אך בלתי־תלויים בזוגות, A_2,A_3 בלתי תלויים אך A_3,A_7 לא, או שאף תשובה לא נכונה?

<u>פתרון:</u>

1. באופן כללי, לכל קבוצה של i ערכים המופיעים בהתחלה, יש איבר מקסימלי, והסיכוי שלו ליפול בכל אינדקס הוא שווה, לכן בפרט ההסתברות שלו ליפול בסוף היא

$$\mathbb{P}\left(A_i\right)=\frac{1}{i}$$

פורמלית - נגדיר B_I - קבוצת i הערכים הראשונים היא I, $|I|=i$, $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$.

$$\mathbb{P}\left(A_i\right)=\sum_I\mathbb{P}\left(A_i\mid B_I\right)\cdot\mathbb{P}\left(B_I\right)=\frac{1}{i}\cdot\sum_I B_I=\frac{1}{i}$$

2. המאורעות בלתי תלויים.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A_2\cap A_3\right) &= \frac{1\cdot1\cdot1}{3!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\mathbb{P}\left(A_2\right)\cdot\mathbb{P}\left(A_3\right) \\ \mathbb{P}\left(A_3\cap A_7\right) &= \frac{1\cdot\binom{6}{3}\cdot1\cdot2!\cdot3!}{7!}=\frac{1}{7\cdot3}=\mathbb{P}\left(A_7\right)\cdot\mathbb{P}\left(A_3\right)\end{aligned}$$

וכך ניתן להראות גם את שאר השוויונות הנדרשים.