מבוא להסתברות

© ארזים

9 במרץ 2016

1 הכלה והדחה

משפט 1.1 יהיו $A_1, \ldots, A_n$ מאורעות.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1}\, \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

הוכחה: היזכר כי

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\omega)$$

נשתמש בכך על שני האגפים. עבור אגף שמאל:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i} \mathbb{P}(\omega)$$

ועבור אגף ימין:

$$\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1}\, \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \sum_{\omega \in \bigcap_{i\in I} A_i} \mathbb{P}(\omega)$$

נראה את השוויון על ידי כך שנבחר $\omega \in \Omega$, ונראה שהסתברותו מופיעה אותה כמות פעמים (לאחר הסכימה) בשני הצדדים.
נקבע $\omega \in \Omega$. אם $\omega \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, הסתברותו לא מופיעה באף אגף - ובפרט מופיעה אותו מספר פעמים בכל אגף.
נאמר $\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, ויהי

$$k = \left|\{i \in I : \omega \in A_i\}\right|, 1 \leq k \leq n$$

באגף שמאל, $\mathbb{P}(\omega)$ מופיעה בדיוק פעם אחת.
באגף ימין, נברר באילו גורמים תופיע $\mathbb{P}(\omega)$. בחיתוך בו מופיעות בדיוק j קבוצות, כלומר

$j=|I|$, תימצא $\mathbb{P}\left(\omega\right)$ אם ורק אם כל j הקבוצות מכילות את ω. יש בדיוק $\binom{k}{j}$ קבוצות אינדקסים I שגודלן j וכל קבוצה בהן מכילות אתω. לכן באגף ימין, $\mathbb{P}\left(\omega\right)$ תתקבל כמות פעמים השווה לביטוי הבא:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}\wedge|I|=j\wedge\omega\in\bigcap_{i\in I}A_i}\left(-1\right)^{|I|-1} &= \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\left(-1\right)^{j-1}=\left(-1\right)\left(\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{k}{j}\left(-1\right)^{j}\right)-1\right)= \\ &= \left(-1\right)\left(\left(1-1\right)^{k}-1\right)=\left(-1\right)\left(0-1\right)=\left(-1\right)\left(-1\right)=1\end{aligned}$$

■

<u>דוגמאות:</u>

1. מגרילים מספר טבעי קטן מהמספר N באופן אחיד. מה הסיכוי שהמספר יתחלק באחד מבין $7,10,15$?
נגדיר

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1,\ldots,N\} \\ \mathbb{P}\left(i\right) &= \frac{1}{N}\end{aligned}$$

כמו כן, נסמן A_k המאורע בו המספר שהוגרל מתחלק במספר k. אנו מחפשים את

$$\mathbb{P}\left(A_7\cup A_{10}\cup A_{15}\right)=?$$

נתחיל בחישוב עבור מאורע יחיד:

$$\mathbb{P}\left(A_k\right)=\frac{|A_k|}{N}=\frac{1}{N}\cdot\left[\frac{N}{k}\right]$$

כמו כן, נשים לב שעבור שלמים l,k מתקיים

$$A_k\cap A_l=A_{\mathrm{lcm}(k,l)}$$

כעת נשתמש בהכלה והדחה:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A_7\cup A_{10}\cup A_{15}\right) &= \mathbb{P}\left(A_7\right)+\mathbb{P}\left(A_{10}\right)+\mathbb{P}\left(A_{15}\right)-\mathbb{P}\left(A_7\cap A_{10}\right)- \\ &- \mathbb{P}\left(A_{10}\cap A_{15}\right)-\mathbb{P}\left(A_7\cap A_{15}\right)+\mathbb{P}\left(A_7\cap A_{10}\cap A_{15}\right)= \\ &= \mathbb{P}\left(A_7\right)+\mathbb{P}\left(A_{10}\right)+\mathbb{P}\left(A_{15}\right)-\mathbb{P}\left(A_{70}\right)-\mathbb{P}\left(A_{30}\right)-\mathbb{P}\left(A_{105}\right)+ \\ &+ \mathbb{P}\left(A_{210}\right)=\frac{1}{N}\left(\left[\frac{N}{7}\right]+\left[\frac{N}{10}\right]+\left[\frac{N}{15}\right]-\left[\frac{N}{70}\right]-\left[\frac{N}{30}\right]-\left[\frac{N}{105}\right]+\left[\frac{N}{210}\right]\right)\end{aligned}$$

עבור N שמתחלק במספר 210, נקבל:

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}-\frac{1}{70}-\frac{1}{30}-\frac{1}{105}+\frac{1}{210}=\frac{9}{35}$$

2. נגריל תמורה אחידה של המספרים $1,\ldots,n$. +מה ההסתברות שלתמורה יש בדיוק k נקודות שבת?

נתחיל מהמקרה $k=0$. נגדיר A_k להיות המאורע בו לתמורה יש בדיוק k נקודות שבת. כעת נחפש את $\mathbb{P}(A_0)$.

נעוד במרחב ההסתברות:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{f:\{1,\ldots,n\}\longleftrightarrow\{1,\ldots,n\}\}\\ \mathbb{P}(i) &= \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

עבור $1\le j\le n$ נגדיר את המאורע B_j בו הנקודה j היא נקודת שבת, וכעת

$$A_0=\bigcap_{j=1}^{n}B_j^c$$

כעת, לפי חוקי דה מורגן

$$\mathbb{P}(A_0^c)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n}B_j\right)=\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,\ldots,n\}}(-1)^{|I|-1}\,\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in I}B_j\right)$$

נקבע $\emptyset\neq I\subseteq\{1,\ldots,n\}$ ונחשב

$$P\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)=\frac{\left|\bigcap_{i\in I}B_i\right|}{n!}=\frac{(n-|I|)!}{n!}$$

שכן יש פשוט לסדר את האיברים שאינם נקודות שבת. לכן,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_0^c) &= \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,\ldots,n\}}(-1)^{|I|-1}\,\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in I}B_j\right)=\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,\ldots,n\}}(-1)^{|I|-1}\,\frac{(n-|I|)!}{n!}=\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}\wedge|I|=j}(-1)^{j-1}\,\frac{(n-j)!}{n!}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j}\cdot\frac{(n-j)!}{n!}=\\ &= \sum_{i=1}^{j}\frac{(-1)^{j-1}}{j!}\end{aligned}$$

לכן מתקיים

$$\mathbb{P}(A_0)=1-\mathbb{P}(A_0^c)=1-\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j!}=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{j}}{j!}\to\frac{1}{e}$$

נשים לב שנובע גם

$$|A_0|=n!\cdot\mathbb{P}(A_0)=n!\cdot\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{j}}{j!}$$

נחפש כעת את $\mathbb{P}(A_k)$ עבור $k \neq 0$. נגדיר J להיות כל תתי הקבוצות של $\{1, \ldots, n\}$ בגודל k. לכן $|J| = \binom{n}{k}$. נגדיר מאורע $C_T, T \in J$, שבו נקודות השבת היחידות בתמורה הן איברי T.
אזי מתקיים

$$A_k = \bigcup_{T \in J} C_T$$

וזהו איחוד של מאורעות זרים. לכן,

$$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{T \in J} \mathbb{P}(C_T) = \sum_{T \in J} \frac{|C_T|}{n!}$$

נותר לחשב את $|C_T|$. כמות זו היא למעשה כמות התמורות על שאר האיברים ($n - |T|$) ללא נקודות שבת, ואת הכמות הזו כבר חישבנו:

$$|C_T| = (n - |T|)! \cdot \sum_{j=0}^{n-|T|} \frac{(-1)^j}{j!}$$

נציב ונקבל:

$$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{T \in J} \frac{(n - |T|)! \cdot \sum_{j=0}^{n-|T|} \frac{(-1)^j}{j!}}{n!}$$

$|T| = k$ ויש בסך הכל $\binom{n}{k}$ אפשרויות לבחירת T, ולכן נקבל:

$$\mathbb{P}(A_k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)! \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$$

אם כן, לכל $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$$

עבור k קבוע, ועבור n שואף לאינסוף:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_k) = \frac{e^{-1}}{k!}$$

התפלגות זו של כמות נקודות השבת נקראת התפלגות פואסון (Poisson) עם פרמטר אחד.

2 פעולות במרחבי הסתברות כלליים

2.1 מרחבי הסתברות מותנים

הגדרה 2.1 יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי מאורע B שעבורו $\mathbb{P}(B) > 0$. נגדיר את מרחב ההסתברות המותנה במאורע B - זהו מרחב הסתברות עם אותו מרחב מדגם Ω ועם פונקציית הסתברות חדשה $\mathbb{P}(* \mid B)$ המקיימת

$$\mathbb{P}(\omega \mid B) = \begin{cases} 0 & \omega \notin B \\ \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(B)} & \omega \in B \end{cases}$$

נבדוק שזהו אכן מרחב הסתברות. צריך להראות שהפונקציה $\mathbb{P}(* \mid B)$ מקבלת ערכים אי שליליים, וכן שהיא מקיימת

$$\sum_{\omega \in B} \mathbb{P}(\omega \mid B)$$

בבירור מתקיים שהתוצאות אי שליליות, ההסתברות הינשה הייתה אי שלילית. כמו כן,

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega \mid B) = \sum_{\omega \in B} \mathbb{P}(\omega \mid B) = \sum_{\omega \in B} \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \cdot \sum_{\omega \in B} \mathbb{P}(\omega) = 1$$

לכן זהו אכן מרחב הסתברות, ולכן כל התוצאות שראינו על מרחבי הסתברות כלליים תקפות גם כאן. למשל:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \mid B) = \mathbb{P}(A_1 \mid B) + \mathbb{P}(A_2 \mid B) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \mid B)$$