<u>מבוא להסתברות</u>

ⓒ ארזים

6 במרץ 2016

1 יישום פרקטי ־ מספרי רמזי

עבור גרף בן חמישה קודקודים, ניתן ליצור מצב בו אין משולש שכל הקשתות בו נמצאות או כל הקשתות בו חסרות. עבור גרף בן שישה קודקודים, לעומת זאת, הדבר לא אפשרי ־ תמיד יהיה משולש כזה.
כך נגדיר את מספרי רמזי.

הגדרה 1.1 המספר $R(t,s)$ הוא כמות הקודקודים המינימלית n כך שבכל צביעה של קשתות הגרף השלם על n קודקודים באדום וכחול, יהיו t קודקודים שכל הקשתות ביניהם צבועות אדום או s קודקודים שכל הקשתות ביניהם צבועות כחול.
אנחנו נתעניין רק במספרים $R(t,t)$.

משפט 1.2 (משפט רמזי) $R(t,s)$ סופי לכל t,s.

$R(3,3)=6, R(4,4)=18$. לעומת זאת, עבור 5 התשובה לא ידועה, ידוע רק $43 \leq R(5,5) \leq 49$. כמו כן, $102 \leq R(6,6) \leq 165$.
<u>**חסם עליון עבור מספרי רמזי:**</u>
צריך להראות שבכל צביעה של קשתות הגרף על n קודקודים יש t קודקודים שהקשתות ביניהן חד־גוניות, ואז יתקיים $R(t,t) \leq n$. ידוע שמתקיים

$$R(t,t) \leq c\frac{4^t}{\sqrt{t}}$$

כאשר c קבוע.
<u>**חסם תחתון עבור מספרי רמזי:**</u>
מספיק למצוא צביעה ספציפית של קשתות על n קודקודים כך שאין t קודקודים שהקשתות ביניהן חד גוניות, ואז יתקיים $R(t,t) > n$. למשל, אפשר להראות כי

$$R(t,t) < (t-1)^2$$

נוכיח את החסם הבא:

$$R(t,t) \geq 2^{\frac{t}{2}}$$

נשתמש בשיטה הסתברותית. נקבע n שערכו ייקבע מאוחר יותר להיות $n=\left[2^{\frac{t}{2}}\right]$, ונתבונן

במרחב הסתברות אחיד על כל הצביעות באדום וכחול של הקשתות של הגרף על n קודקודים.
כמות הצביעות הללו היא

$$|\Omega| = 2^{\binom{n}{2}}$$

ולכן ההסתברות לצביעה ספציפית היא

$$\mathbb{P}\left(\omega\right) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}}$$

נגדיר את המאורע A להיות המאורע בו קיימים t קודקודים שכל הקשתות ביניהם צבועות באותו צבע (כחול או אדום). נוכיח שמתקיים

$$\mathbb{P}\left(A\right) < 1$$

ומכך נובע שיש צביעה שבה A לא מתקיים, כלומר $R\left(t,t\right) > n$.
תהי I אוסף כל תתי הקבוצות בגודל t של קודקודים. מתקיים

$$|I| = \binom{n}{t}$$

נגדיר גם עבור $s \in I$ את המאורע A_s שבו הקשתות בין הקודקודים בקבוצה s צבועים באותו הצבע.
נשים לב שמתקיים

$$A = \bigcup_{s\in I} A_s$$

כעת, מחסם האיחוד,

$$\mathbb{P}\left(A\right) \leq \sum_{s\in I} \mathbb{P}\left(A_s\right)$$

נותר להעריך את ההסתברות של A_s. היות ומרחב ההסתברות שלנו אחיד, מתקיים

$$\mathbb{P}\left(A_s\right) = \frac{|A_s|}{|\Omega|}$$

נשים לב שמתקיים

$$|A_s| = 2^{\binom{n}{2}-\binom{t}{2}+1}$$

כלומר, כמות האפשרויות לצבוע את הקשתות שלא בין הקודקודים שבקבוצה s, כפול 2 עבור

האפשרות לבחור צבע.
כעת, מתקיים

$$\mathbb{P}\left(A_s\right)=2^{1-\binom{t}{2}}=2^{1-\frac{t(t-1)}{2}}$$

נחזור לחסם האיחוד, ונקבל:

$$\mathbb{P}\left(A\right)\leq\binom{n}{t}\cdot2^{1-\binom{t}{2}}$$

נותר לבדוק שעבור $n=\left[2^{\frac{t}{2}}\right]$ מתקיים שהאגף הימני קטן ממש מאחד. אכן:

$$\begin{aligned}\binom{n}{t}\cdot2^{1-\binom{t}{2}} & < & \frac{n^{t}}{n!}\cdot2^{1-\binom{t}{2}}=\frac{n^{t}}{t!}2^{1-\frac{t(t-1)}{2}}=\frac{n^{t}\cdot2^{1+\frac{t}{2}}}{t!\cdot2^{\frac{t^{2}}{2}}}\leq\\ & \leq & \frac{2^{\frac{t^{2}}{2}}\cdot2^{1+\frac{t}{2}}}{t!\cdot2^{\frac{t^{2}}{2}}}=\frac{2^{1+\frac{t}{2}}}{t!}<1\end{aligned}$$