מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

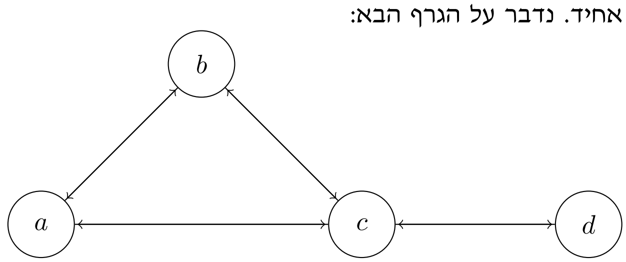
5 ביוני 2016

1 התכנסות אל ההתפלגות הסטציונרית

משפט 1.1 נתונה שרשרת מרקוב אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית π. לכל התפלגות התחלתית μ ולכל מצב $x \in S$ מתקיים

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \sum_{s=0}^{t-1} \mathbb{P}_{\mu}\left(X_s = x\right) = \pi\left(x\right)$$

דוגמא נדון במקרה של הילוך מקרי פשוט על גרף, בו מכל קודקוד, הקודקוד הבא מתפלג אחיד. נדבר על הגרף הבא:



בגרף זה, לשרשרת יש התפלגות סטציונרית $\pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)$.
כמו כן, נגדיר את הפונקציה

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 100 & x = d \\ 20 & x = b \\ 0 & x = a \vee x = c \end{cases}$$

בכל קודקוד x נוציא $f\left(x\right)$ שקלים. כמה שקלים ההלך מוציא בממוצע לצעד לאחר הרבה צעדים? כלומר, מהו

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \mathbb{E}_{\mu}\left(f\left(X_s\right)\right)$$

פתרון מתקיים

$$\mathbb{E}_{\mu}\left(f\left(X_s\right)\right) = \sum_{x\in S} \mathbb{P}_{\mu}\left(X_s = x\right) \cdot f\left(x\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\mathbb{E}_{\mu}\left(f\left(X_{s}\right)\right) &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\sum_{x\in S}\mathbb{P}\left(X_{s}=x\right)\cdot f\left(x\right)=\lim_{t\to\infty}\sum_{x\in S}f\left(x\right)\cdot\frac{1}{t}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}\mathbb{P}_{\mu}\left(X_{s}=x\right)\\ &= \sum_{x\in S}f\left(x\right)\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}\mathbb{P}_{\mu}\left(X_{s}=x\right)=\sum_{x\in S}f\left(x\right)\cdot\pi\left(x\right)\end{aligned}$$

וכעת נציב ונקבל

$$\sum_{x\in S}f\left(x\right)\cdot\pi\left(x\right)=\frac{1}{4}\cdot20+\frac{1}{8}\cdot100=5+12.5=17.5$$

1.1 התכנסות נקודתית

נאמר שבשרשרת יש התכנסות נקודתית אם לכל התפלגות התחלתית μ ולכל מצב $x\in S$ מתקיים

$$\mathbb{P}_{\mu}\left(X_{t}=x\right)\xrightarrow[t\to\infty]{}\pi\left(x\right)$$

1.1.1 מחזור של מצב

הגדרה 1.2 עבור מצב x, נסמן

$$T\left(x\right)=\left\{ t\geq1\mid\mathbb{P}_{x}\left(X_{t}=x\right)>0\right\}$$

קבוצת זמני החזרה האפשריים אל x.
המחזור של x הוא $\gcd\left(T\left(x\right)\right)$.

למה 1.3 בשרשרת מרקוב אי פריקה, המחזור של כל המצבים זהה.

הוכחה: נקבע זוג מצבים x,y. כיוון שהשרשרת אי פריקה, קיימים t,s כך שמתקיים

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{x}\left(X_{t}=y\right) &> 0\\ \mathbb{P}_{y}\left(X_{s}=x\right) &> 0\end{aligned}$$

נבחין כי מתקיים $r\in T\left(x\right)\cap T\left(y\right)$ $t+s=:$. נשים לב גם שאם $k\in T\left(x\right)$ אזי $k+r\in T\left(y\right)$. במילים אחרות, $T\left(x\right)\subseteq T\left(y\right)-r$.
כעת, אם d מחלק משותף של כל איברי $T\left(y\right)$, אזי בפרט $d\mid r$. כמו כן, אם $k\in T\left(x\right)$ אזי $k+r\in T\left(y\right)$, ולכן $d\mid k+r$, כלומר $d\mid k$. לכן d מחלק משותף של כל איברים $T\left(x\right)$. באופן סימטרי, אם d מחלק משותף של כל איברי $T\left(x\right)$, אזי הוא מחלק גם את כל אבירי $T\left(y\right)$. בפרט, המחלק המשותף המקסימלי זהה, וסיימנו. ■

הגדרה 1.4 שרשרת מרקוב נקראת חסרת מחזור (לא מחזורית) אם המחזור של כל מצב בה הוא 1. אחרת היא תיקרא מחזורית. עבור שרשרת אי פריקה, נאמר שהמחזור של השרשרת הוא המחזור המשותף לכל המצבים.

משפט 1.5 (המשפט הארגודי לשרשראות מרקוב) התכנסות נקודתית מתקיימת עבור שרשראות אי פריקות וחסרות מחזור.

טענה 1.6 עבור שרשרת מרקוב אי פריקה וחסרת מחזור, קיים $r \geq 1$ כך שלכל שני מצבים x, y מתקיים

$$\mathbb{P}_x\left(X_r = y\right) > 0$$

לא נוכיח את הטענה במלואה כעת, אלא נסביר את הרעיון. נחשוב על השרשרת בבלוקים: $X_0 \to X_r \to X_{2r} \to \dots$. נרשום את השרשרת בצורה הבאה:

$$X_0 \to X_r$$

בסיכוי קטן ε, נקפוץ לפי ההתפלגות הסטציונרית π. בסיכוי $1-\varepsilon$, נקפוץ לפי הסתברויות משלימות. אם נבצע זאת בכל קפיצת r צעדים, אזי מתישהו נקפוץ בהתפלגות הסטציונרית, כי $\varepsilon > 0$, ומשם נישאר מפולגים כך ־ כלומר החל ממקום מסויים יהיה סיכוי חיובי להגיע לכל מצב.