מבוא להסתברות

ⓒ ארזים

1 ביוני 2016

1 יחידות ההתפלגות הסטציונרית

נוכל לבנות מקרים בהם לא תהיה התפלגות סטציונרית יחידה. למשל, גרף בו כל הקודקודים מבודדים, ובהסתברות 1 אנחנו עוברים מקודקוד לעצמו - מטריצת המעבר היא מטריצת היחידה, ולכן כל התפלגות היא סטציונרית. דוגמה נוספת היא גרף לא קשיר - ניתן למצוא לכל רכיב קשירות התפלגות סטציונרית, שכן מטריצת המעבר היא מטריצת בלוקים אלכסונית. כמו כן, ברגע שיש שתיים יש אינסוף - כל צירוף קמור של התפלגויות סטציונריות יהיה התפלגות סטציונרית בעצמו.

הגדרה 1.1 שרשרת מרקוב נקראת אי־פריקה אם לכל $x, y \in S$ קיים $t \geq 1$ כך שמתקיים

$$\mathbb{P}_x \left(X_t = y \right) > 0$$

אחרת, שרשרת המרקוב היא פריקה.

הערה 1.2 לפי הגדרה, $P\left(x, y\right)$ היא הסתברות המעבר בצעד אחד מן x אל y. $P^t\left(x, y\right)$ היא הסתברות המעבר מן x אל y תוך t צעדים בדיוק. אכן, הוכחנו כי לכל התפלגות התחלתית μ, התפלגות המיקום בזמן t, שנסמנה μ_t, נתונה על ידי $\mu_t = \mu \cdot P^t$. בפרט, אם $\mu_x = e_x$ (כלומר 0 בכל מקום שאינו x, ואחד שם), נקבל $\mathbb{P}_x \left(X_t = y \right) = \left(\mu_x \cdot P^t \right) (y) = P^t \left(x, y \right)$.

מכאן, שרשרת מרקוב היא פריקה אם ורק אם לכל x, y קיים $t \geq 1$ כך שמתקיים $P^t\left(x, y\right)$.

משפט 1.3 אם השרשרת אי־פריקה אז ההתפלגות הסטציונרית יחידה.

הוכחה: מספיק להראות שמימד המרחב עצמי משמאל של הערך העצמי 1, כלומר מימד מרחב הפתרונות למערכת $\pi \cdot P = \pi$, הוא 1. נוכיח במקום עבור המרחב מימין - הדבר שקול, משום שדרגת P שווה לדרגת P^t. כלומר, אנחנו רוצים לקבל שמימד מרחב הפתרונות של $P \cdot f = f$ הוא 1. פתרון אחד, ברור, למערכת זו הוא הווקטור $\left(1, 1, \ldots, 1\right)^t$. נרצה להוכיח כי כל פתרון הוא ווקטור קבוע (על סקלר כלשהו).

הגדרה 1.4 פתרון למשוואה $P \cdot f = f$ נקרא פונקציה הרמונית של שרשרת המרקוב.

אנו חושבים בהקשר זה על הווקטור f כפונקציה $f : S \to \mathbb{R}$.

נעזר בטענה הבאה:

טענה 1.5 תהי $f:S\to\mathbb{R}$ (ווקטור עמודה). אזי לכל $x\in S$,

$$\left(P\cdot f\right)\left(x\right)=\mathbb{E}_{x}\left(f\left(X_{1}\right)\right)$$

הוכחה: נחשב:

$$\mathbb{E}_{x}\left(f\left(X_{1}\right)\right)=\sum_{y\in S}\mathbb{P}_{x}\left(X_{1}=y\right)\cdot f\left(y\right)=\sum_{y\in S}P\left(x,y\right)\cdot f\left(y\right)=\left(P\cdot f\right)\left(x\right)$$

■

מסקנה 1.6 לכל $f:S\to\mathbb{R}$ ולכן $t\geq1$,

$$\left(P^{t}f\right)\left(x\right)=\mathbb{E}_{x}\left(f\left(X_{t}\right)\right)$$

הוכחה: P^{t} היא מטריצת מעבר של שרשרת מרקוב שמבצעת t צעדים של השרשרת המקורית.
■

מסקנה 1.7 עבור הילוך מקרי פשוט על גרף, אזי f הרמונית אם ורק אם בכל קודקוד x, הערך של f הוא ממוצע הערכים בשכני x.

הוכחה:

$$\begin{aligned}P\cdot f & = f\\
f\left(x\right) & = \left(P\cdot f\right)\left(x\right)=\mathbb{E}_{x}\left(f\left(X_{1}\right)\right)=\sum_{\substack{y\in V\\(x,y)\in E}}\mathbb{P}_{x}\left(X_{1}=y\right)\cdot f\left(y\right)=\\
 & = \frac{1}{\deg\left(x\right)}\sum_{\substack{y\in V\\(x,y)\in E}}f\left(y\right)\end{aligned}$$

■

כעת, נרצה להראות שכל פונקציה הרמונית היא קבועה. תהי f פונקציה הרמונית. נסמן

$$m=\max_{x\in S}f\left(x\right)$$

יהי $x\in S$ מצב כך שמתקיים $f\left(x\right)=m$. יהי $y\in S$. מאי פריקות, יהי $t\geq1$ כך שמתקיים $\mathbb{P}_{x}\left(X_{t}=y\right)>0$, כלומר $P^{t}\left(x,y\right)>0$.

כעת, מהמסקנה הראשונה, מתקיים

$$\begin{aligned}
m &= f(x) = \left(P^t f\right)(x) = \mathbb{E}_x\left(f\left(X_t\right)\right) = \mathbb{P}_x\left(X_t = y\right)\cdot f(y) + \sum_{\substack{z\in S\\ z\neq y}} \mathbb{P}_x\left(X_t = z\right)\cdot f(z) \leq \\
&\leq \mathbb{P}_x\left(X_t = y\right)\cdot f(y) + m\cdot \sum_{\substack{z\in s\\ z\neq y}} \mathbb{P}_x\left(X_t = z\right) = \mathbb{P}_x\left(X_t = y\right)\cdot f(y) + m\cdot \mathbb{P}_x\left(X_t \neq y\right) = \\
&= \mathbb{P}_x\left(X_t = y\right)\cdot f(y) + m\cdot\left(1 - \mathbb{P}_x\left(X_t = y\right)\right) = m + \mathbb{P}_x\left(X_t = y\right)\left(f(y) - m\right) \\
0 &= \mathbb{P}_x\left(X_t = y\right)\left(f(y) - m\right) \\
0 &= f(y) - m \\
m &= f(y)
\end{aligned}$$

ולכן $f(y) = m$ לכל $y \in S$, והוכחנו את הנדרש. ■

2 התכנסות להתפלגות סטציונרית

התכנסות נקודתית

לכל התפלגות התחלתית μ ולכל מצב $y \in S$,

$$\mathbb{P}_\mu\left(X_t = y\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \pi(y)$$

דוגמא נגדית

בגרף קשיר בן שני קודקודים והילוך מקרי פשוט עליו, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, אבל, אם המצבים הם x, y,

$$\mathbb{P}_x\left(X_t = y\right) \equiv t \pmod 2 = \begin{cases} 1 & t \equiv 1 \pmod 2 \\ 0 & t \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

התכנסות ממוצעת

לכל התפלגות התחלתית μ ולכל מצב $y \in S$,

$$\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1} \mathbb{P}_\mu\left(X_s = y\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \pi(y)$$

משפט 2.1 אם השרשרת אי־פריקה, אזי יש התכנסות ממוצעת.

הוכחה: תהי μ התפלגות התחלתית. נסמן $\pi_t\left(y\right)$ להיות ממוצע כמות הביקורים בקודקוד y.
כעת,

$$\pi_t\left(y\right)=\frac{1}{t}\cdot\mathbb{E}_\mu\left(\sum_{s=0}^{t-1}1_{\left(X_s=y\right)}\right)=\frac{1}{t}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}\mathbb{P}_\mu\left(X_s=y\right)$$

בשיעור השעבר ראינו כי אם $\left(t_k\right)$ היא תת־סדרה כך שהסדרה $\pi_{t_k}\left(y\right)$ מתכנסת לכל $y\in S$, אזי הגבול

$$\pi\left(y\right)=\lim_{k\to\infty}\pi_{t_k}\left(y\right)$$

מגדיר התפלגות סטציונרית. אצלנו, מאי פריקות, הגבול הוא תמיד אותה התפלגות סטציונרית.

יהי $y\in S$, ותהי $\left(t_k\right)$ תת סדרה כך שמתקיים

$$\lim_{k\to\infty}\pi_{t_k}\left(y\right)=\limsup_{t\to\infty}\pi_t\left(y\right)$$

אז יש לה תת סדרה נוספת $\left(t_{k_j}\right)$ כך שלכל $z\in S$ מתקיים

$$\lim_{j\to\infty}\pi_{t_{k_j}}\left(z\right)=\pi\left(z\right)$$

בפרט,

$$\lim_{j\to\infty}\pi_{t_{k_j}}\left(y\right)=\pi\left(y\right)$$

מכאן נקבל כי

$$\pi\left(y\right)=\lim_{j\to\infty}\pi_{t_{k_j}}\left(y\right)=\lim_{k\to\infty}\pi_{t_k}\left(y\right)=\limsup_{t\to\infty}\pi_t\left(y\right)$$

באותו אופן נוכל לקבל כי

$$\liminf_{t\to\infty}\pi_t\left(y\right)=\pi\left(y\right)$$

ובסך הכל קיבלנו כי

$$\lim_{t\to\infty}\pi_t\left(y\right)=\pi\left(y\right)$$

וקיבלנו את מה שרצינו להוכיח. ■

כעת נחזור להתכנסות נקודתית.

הגדרה 2.2 עבור מצב $x \in S$ תהי

$$T(x) = \{t \geq 1 \mid \mathbb{P}_x(X_t = x) > 0\}$$

זמני החזרה האפשריים למצב x.

הגדרה 2.3 המחזור של x מוגדר להיות $\gcd(T(x))$.

הגדרה 2.4 שרשרת נקראת חסרת מחזור אם לכל $x \in S$, המחזור של x הוא 1.

משפט 2.5 (המשפט הארגודי לשרשרת מרקוב) עבור שרשרת אי פריקה וחסרת מחזור, יש התכנסות נקודתית.