חלק III - תוחלת, שונות ופונקציה יוצרת מומנטים

תוחלת משתנה מקרי בדיד

הגדרה - יהי X מ"מ בדיד. כלומר A_X קבוצת האטומים שלו, מכיל קבוצה בת מניה של איברים כך ש- $\mathbb{P}(X\in A_X)=1$.
אזי:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\substack{c\in A_X \\ c\ge 0}} c\cdot \mathbb{P}(X=c) + \sum_{\substack{c\in A_X \\ c<0}} c\cdot \mathbb{P}(X=c)$$

אם שני הסכומים לא סופיים, נאמר שהתוחלת אינה מוגדרת.
אם שני הסכומים סופיים, והתוחלת סופית, נאמר שה-מ"מ אינטגרבילי.

טענה - יחידות הצגת התוחלת
יהי X מ"מ בדיד אינטגרבילי, ונניח:

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \mathbb{1}_{B_i}$$

כאשר $A_i, B_i \in \mathcal{F}$ מאורעות, ו- $\mathbb{1}$ מ"מ האינדיקטור.
אזי

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \mathbb{P}(B_i)$$

סימון - לסכומים נסמן $X^+=\max\{X,0\}$ ו- $X^-=\min\{X,0\}$ ואז $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[X^+]+\mathbb{E}[X^-]$

תוחלת משתנה מקרי לא בדיד

הגדרה - בסימונים הנ"ל, נגדיר תוחלת של מ"מ X לא בהכרח בדיד.

$$\mathbb{E}[X^+] = \sup\{\mathbb{E}[Y] \mid 0\le Y\le X^+ ,\ Y \text{ מ"מ בדיד}\}$$
$$\mathbb{E}[X^-] = \sup\{\mathbb{E}[Y] \mid 0\le Y\le -X^- ,\ Y \text{ מ"מ בד"ד}\}$$

ואז- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X^-]$

התוחלת קיימת אם לפחות אחד מבין $\mathbb{E}[X^+], \mathbb{E}[X^-]$ סופי.
אם שניהם סופיים, אז התוחלת סופית ונאמר כי X אינטגרבילי.

טענה - יהי X מ"מ כלשהו. אזי:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty}(1-F_X(t))\,dt + \int_{-\infty}^{0}(0-F_X(t))\,dt$$

מסקנה - יהי X מ"מ כלשהו עם פונקציית צפיפות f:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,dt$$

תכונות התוחלת

טענה - אם $\mathbb{P}(X\ge Y)=1$ אזי $\mathbb{E}[X]\ge\mathbb{E}[Y]$
במקרה זו נאמר כי X שולט סטוכסטית ב-Y.

טענה - $\forall\alpha\in\mathbb{R}.\ \mathbb{E}[\alpha X]=\alpha\mathbb{E}[X]$

טענה - $\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$

טענה - יהי X מ"מ אי שלילי ואינטגרבילי, יהי $\varepsilon>0$.

$$\mathbb{P}(X\ge\varepsilon)\le\frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}$$

תוחלת טרנספורמציה של מ"מ

יהי X מ"מ אינטגרבילי, ו-φ פונקציית בורל. $Y=\varphi(X)$

לפי הגדרה:

$$E[Y]=E[\varphi(X)]=\int_0^\infty(1-F_{\varphi(X)}(t))dt+\int_{-\infty}^0(0-F_{\varphi(X)}(t))dt$$

אך מתקיים גם עבור מ"מ בדיד:

$$E[Y]=E[\varphi(X)]=\sum_{\substack{c\in C\\ c\ge0}}\varphi(c)\cdot P(X=c)+\sum_{\substack{c\in C\\ c<0}}\varphi(c)\cdot P(X=c)$$

ועבור מ"מ רציף:

$$E[Y]=E[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)f_X(t)dt$$

הצגת תוחלת מ"מ דרך אחוזון

אם X מ"מ ו-X^* האחוזון המתאים לו, X ו-X^* שווי התפלגות ולכן גם שווי תוחלת.

אם הם אינטגרביליים: $E[X]=E[X^*]=\int_0^1 X^*(t)dt$

אם הוא לא חסום בקצוות, אפשר לקחת גבול עד ε ולהשאיף ל-0.

שונות וסטיית תקן

הגדרה - יהי X מ"מ. מדד הפיזור

השונות של X היא - $V(X)=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-E[X]$

סטיית התקן של X היא - $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

טענה - $V(aX+b)=a^2V(X)$

טענה - אי שוויון צ'בישב

יהי X מ"מ אינטגרבילי ובעל שונות

אזי לכל $a>0$ מתקיים $P(|X-E[X]|\ge a)\le\frac{V(X)}{a^2}$

פונקציה יוצרת מומנטים

הגדרה - יהי X מ"מ. הפונקציה $M_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $M_X(t)=E[e^{tX}]$

נקראת פונקציה יוצרת מומנטים.

היא מוגדרת אם קיימת סביבה קטנה סביב 0 בה התוחלת הנ"ל סופית.

הנגזרת ה-n של הפונקציה ב-0: $M_X^{(n)}(0)=E[X^n]$

היא המומנט ה-n של X.

* אפשר להשתמש במומנט הראשון כדי למצוא תוחלת ובשני כדי למצוא שונות

טענה - אם $M_X(t)$ קיים וסופי בסביבת 0 $(-s,s)$,

אזי $E[|X|^n]$ סופי לכל n וכן

$$M_X(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nE[X^n]}{n!}$$