

חלק IV - נ"ן 27 מ"מ"מ

הגזרה - יהי (μ, λ, Ω) מרחב הסתברות.

סוקרציה $(X, Y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 סכס קבוצה בולטת ב- $\mathbb{R}^2$ $B \in \mathcal{B}_2$
 סכס $\{x \in \mathbb{R}^2 : \exists Y \in \mathcal{B}_2 \text{ s.t. } x \in Y\}$

הסונקציה $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$ היא נ"ח כל

$$F_{X,Y}(t_1, t_2) = P(X \leq t_1, Y \leq t_2) \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$$

שאלה - מהו מרחב הסתברות $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, P_{X,Y})$ כאשר:

$$P_{X,Y}(B) = P((X,Y) \in B) = P((X,Y) \in \gamma(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}_2$$

יתרה מזה, לכל (x, y) ו- (u, v) נ"ל $P_{x,y} = P_{u,v} \iff F_{x,y} = F_{u,v}$

תבניות פה"מ דומיננטי:

$\forall l. \quad F_{X,Y}(-\infty, l) = \lim_{k \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(k, l) = 0$

$\forall K. F_{X,Y}(K, -\infty) = \lim_{l \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(K, l) = 0$

$$F_{X,Y}(\infty, \infty) = \lim_{\substack{K \rightarrow \infty \\ L \rightarrow \infty}} F_{X,Y}(K, L) = 1$$

$$F_{x,y}(K_1, l_1) \leq F_{x,y}(K_2, l_2) \leftarrow l_1 < l_2 \text{ and } K_1 < K_2 - \text{monotonicity}$$

- דצ'קות מי'אין בענין הרכ'בים!

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} F_{X,Y}(K+h, l) = \lim_{\alpha \downarrow 0} F_{X,Y}(K, l+h) = F_{X,Y}(K, l)$$

$\gamma - 1 \times A'' \delta W$

$$F_X(t_1) = P(X \leq t_1) = P(X \leq t_1, -\infty < Y < \infty) = F_{X,Y}(t_1, \infty) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{F(t_1, t_2)}{F_Y(t_2)} \quad \text{for } \mathbb{R}_1$$

יִתִּיבָה מִצֹּ, עֵתָן שֶׁהַחֲדָר מֵהַ חֹץ הַמִּדִּים טֹסֵסִים חֲדָי כֹּל טַרְמִסְבֹּרְמִצִּיָּה מִחֲדָרָה בֹּרֵחַ, וּבִפְתָּח הַ טַרְמִסְבֹּרְמִצִּיָּה כְּצִיפָה, אֶצְמָחָה: x^2 , x , וְכ'.

הפסדה - מחזור $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ תיקרן אטום אס:

$$P(X=x, Y=y) = P(X \leq x, Y \leq y) - P(X < x, Y \leq y) = F_{X,Y}(x, y) - \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ y' \rightarrow y^-}} F_{X,Y}(x', y') > 0$$

קבוצת האטומים S^0 מ"מ מכיל כלל היותר מספר קן מ"מ שם נקודות.

$P((x,y) \in A_{x,y}) = 1$ שנייה $A_{x,y}$ כלל מוגדר נכון וזה נכון

באקרה זה, ניתן להציג את התפסותו ע"י:

$$P(x, y) = P(X=x, Y=y) \quad \forall (x, y) \in A_{X,Y}$$

הבצרה - מ"ה יקרא כ"ס אום ק"מט סומט"ייה $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ כ"כסה סמקוטס"ן,

הנקודות צביון משותפת כן שמתק"ם t_1, t_2 , s_1, s_2

$$P(s_1 < X < s_2, t_1 < Y < t_2) = \iint_{(s_1, s_2) \times (t_1, t_2)} f(x, y) dx dy = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} f(x, y) dx dy$$

הסתברות מותנית וטוי תלוי בין מאורעות

השקרה - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות.
נתון כי מאורע B קרה עבור $P(B) > 0$, נגדיר

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

P_B נקראת הסתברות מותנית.

נגדיר $\mathcal{F}_B = \{A \in \mathcal{F} : A \cap B = \emptyset \text{ או } A \cap B = B\}$. טוי $(\Omega, \mathcal{F}_B, P_B)$ מרחבי הסתברות.

תכונות - אם $P(B) > 0$ אז $\forall A \in \mathcal{F}$: $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

- נוסחת ההסתברות הנשמה: פני $B_1, \dots, B_n$ חלוקה של Ω לאורווי בלי הסתברות חיובית. יהי A מאורע.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) P(B_i)$$

- נוסחת בייס: תחת אדם סימנים -

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) P(B_i)}$$

השקרה - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות. A, B מאורעות.
אז A, B בלתי תלויים אם מתקיים אחד מהבאים:

$$\begin{aligned} & P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ & (P(B) > 0) \quad P(A|B) = P(A) \\ & (P(A) > 0) \quad P(B|A) = P(B) \end{aligned}$$

דמיה - אם $P(B) > 0$ אז כל מאורע A בלי A, B בלי.

השקרה - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות. יהיו $\{E_k\}_{k=1}^n$ מאורעות.
נאמר שהם בלתי תלויים אם כל $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ מתקיים:

$$P(\bigcap_{k \in I} E_k) = \prod_{k \in I} P(E_k)$$

דמיה - יהיו $\{E_k\}_{k=1}^n$ בלי.

כל A , נסמן χ_{E_k} את האינדיקטור של E_k .
אז כל אוסף מאורעות $\{B_k\}_{k=1}^n$ כך ש- $B_k \in \sigma(\chi_{E_1}, \dots, \chi_{E_k})$ מתקיים:

$$P(\bigcap_{k=1}^n B_k) = \prod_{k=1}^n P(B_k)$$

* כלומר - אינדיקטורים בין מאורעות בלי אינדיקטורים בלי, ו- ϕ .

מרחב בלי תלויים

השקרה - יהיו $\{X_k\}_{k=1}^n$ מרחב.

נאמר כי הם בלתי תלויים אם כל אוסף מאורעות $\{B_k\}_{k=1}^n$ כך ש- $B_k \in \sigma(X_k)$ מתקיים:

$$P(\bigcap_{k=1}^n B_k) = \prod_{k=1}^n P(B_k)$$

מ"נ ב"ר, נגזיר את סטטיסטי הסדר
 הערך k - ה- k בעצמו בטורים $X_1, \dots, X_n$

$$F_{X_{(k)}}(t) = P(X_{(k)} \leq t) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} (F(t))^i (1-F(t))^{n-i}$$

$$f_{X_{(k)}}(t) = n f(t) (F(t))^{k-1} (1-F(t))^{n-k}$$

ב"ר ואינדקסציה"ם

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$$

סך תוחלות $\{ \mu_k \}_{k=1}^n$. נגז'ר $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$

$$E[S_n] = \sum_{k=1}^n \mu_k$$

$$V[S_n] = \sum_{k=1}^n V(X_k)$$

מ"נ ס (פונקציה יוצרת מומנטים) $M_{X_i}(t)$

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$