

חלק II - משתנים מקריים חד-מימדיים

משפחה מקרי - פונקציה מדודה

הגדרה I - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.
 פונ' $R \rightarrow \mathbb{R}$ יא' X היא פונקציה מדודה או משתנה מקרי.
 אם $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$ קבוצה בורלית אז $R \rightarrow \mathbb{R}$ מתקיים $X^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{F}$.

הגדרה II - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.
 פונ' $R \rightarrow \mathbb{R}$ יא' X היא פונקציה מדודה או משתנה מקרי.
 אם $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$ מתקיים $X^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{F}$.

לשנה - יהיה $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדוד. תהי $R \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה.
 אז $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$ אם $X^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{F}$ היא σ -אלגברה על $\mathbb{R}$.

מסקנה - הגדרה I ו-II שקולות.

הגדרה - יהי X מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
 ה- σ -אלגברה הנוצרת ע"י X היא האינמינלית המנוצרת על ידי X מדוד.
 נסמן $\mathcal{B}(X)$.

הערה - נסמן $T = \{X^{-1}((-\infty, t]) \mid t \in \mathbb{R}\}$ אז $\mathcal{B}(X) = \sigma(T)$.

לשנה - אם $\mathcal{B}$ תוצאות מקבלות אותו סק $\mathcal{B}$ אז $\mathcal{B}$ ניתן "להחמין" ביניהם.
 ה- σ -אלגברה הנוצרת.

נלומר, יהי X מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
 אז $A \mapsto X(A)$ $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{B}(X), X(A) = X(X(A))$.

לשנה - יהיו X, Y מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. אז:

- א - $X \in \mathcal{B}(X)$ מ"מ על $\mathbb{R}$
- ב - $X + Y \in \mathcal{B}(X, Y)$ מ"מ
- ג - $XY \in \mathcal{B}(X, Y)$ מ"מ
- ד - $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}(X, Y)$

ה- $F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מדודה בורל (על $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$) אם F_X מ"מ.

מסקנה - הרכבת מ"מ עם פונקציה רציפה, גם היא מ"מ.

פונקציית התפלגות מצטברת

הגדרה - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, ו- $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ מ"מ.
 פונ' $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ היא פונקציית התפלגות מצטברת.
 אם מתקיים $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

לשנה - תכונות פונ' התפלגות מצטברת:

- א - $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1$
- ב - F_X מונוטונית עולה ורציפה
- ג - הפונקציה רציפה מימין

$\lim_{t \rightarrow t_0} F_X(t) = F_X(t_0)$

הערה - יהיו X, Y מ"מ (על אותו מרחב הסתברות).
 אז $F_X = F_Y$ $\Leftrightarrow X$ ו- Y שווים התפלגות.

הגדרה - יהי X מ"מ. נגדיר פונ' הסתברות על $\mathcal{B}$ על $\mathbb{R}$: $P_X: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall B \in \mathcal{B}, P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

לשנה - $F_X = F_Y \Leftrightarrow P_X = P_Y$

הגדרה - יהי X מ"מ $\mathcal{F}$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $t \in \mathbb{R}$ נקודה
 $F_x(t) = \lim_{t' \rightarrow t^-} F_x(t') < F_x(t)$ אם $\frac{dF_x}{dt}$ אטום (כלומר, אם t יש נקודה אי-רציפה - נדרגה)

הגדרה - התנאי של מ"מ X הוא הקבוצה הסדורה המינימלית $S \subseteq \mathbb{R}$
 $P(X \in S) = 1$
 סבורה כלומר:

$$S = S(X) = \{t \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0, P(t - \varepsilon < X < t + \varepsilon) > 0\}$$

סוגי משתנים מקר"ם ופונקציות צפיפות

הגדרה - משתנה מקר"ם בדיד הוא מ"מ המקבל מספר בן-מנייה של תוצאות.
 פונקציית ההסתברות המצטברת שלו הנה פונקציית $\mathbb{R}$ מדרגות.
 פתאפת-תה A_x קבוצת האטמים של מ"מ X .
 $P(X \in A_x) = 1 \iff X$ הוא בדיד

* A_x סבן מנייה $\leftarrow X$ בדיד, אך לא הפוך.

הגדרה - מ"מ X יקראו מ"מ רציף אם קיימת פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 רציפה $\mathcal{F}$ המקטעין כך שעכס $-\infty < a < b < \infty$ מתקיים:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

f יקראו פונקציית הצפיפות של X .

$$* \text{ המשמעות היא } P(X \in (t, t+dx)) \approx f(t) \cdot dx$$

טענה - יהי X מ"מ רציף. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה $\mathcal{F}$ המקטעין ואי שלילית.
 כן שעכס $X \in \mathbb{R}$ מתקיים כי:
 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$
 ואז עכס נק רציפות $X \in \mathbb{R}$ של f מתקיים:
 $F'(x) = f(x)$

הערות - מההגדרה נובע:
 $\forall t \in \mathbb{R}, P(X=t) = 0$
 $f \geq 0$
 $F_x(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$
 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

הגדרה - פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה $\mathcal{F}$ המקטעין נקראת פונקציית צפיפות אם $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

* מהצורה זו, נגזיר שם $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, ונקבל ש- $F(x)$ הוא סבן פונקציית הסתברות מצטברת.

האחוזון

הגדרה - יהי X מ"ה על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$$X^* \text{ אחוזון אם: } \forall s \in (0,1). \quad X^*(s) = \sup \{ t \mid F_X(t) \leq s \}$$

נשתמש באחוזון כדי להגדיר מ"ה על $(0,1), \mathcal{B}, \lambda$ באופן הבא:

$$\forall s \in \mathbb{R}. \quad s \mapsto X^*(s)$$

טענה - יהי X מ"ה על $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ אזי: $F_X = F_{X^*}$

התפלגות יצולות

התפלגות גאומטרית

במבוא להסתברות, $X \sim \text{Geom}(p)$ הוא מ"ה המונה את מספר הנסיונות הדרושים עד להצלחה הראשונה, ונקיים הפה"ה תהיה פונקציה מדרגית.

$$P(X=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$$

שגדיר התפלגות גאומטרית על מ"ה $\Omega = (0,1)$ ו- $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, נכך $P(a,b) = b-a$ ונכך $(a,b) \subseteq (0,1)$ נגדיר מ"ה גאומטרית כן:

$$X = \begin{cases} 1 & t \in (0, p] \\ 2 & t \in (p, p + (1-p) \cdot p] \\ 3 & t \in (p + (1-p) \cdot p, p + (1-p) \cdot p + (1-p)^2 \cdot p] \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

התפלגות בינומית

כמו במבוא להסתברות, $X \sim \text{Bin}(n, p)$ הוא מספר ההצלחות מתוך n ניסיונות ב"ה שמצלחיות בהתפלגות p .

באופן פורמלי: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ כן ש- $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ ו- $\mathcal{F} = P(\Omega)$ נכך מתקיים: $P(\{m\}) = \binom{n}{m} (1-p)^{n-m} \cdot p^m$ ($p \in (0,1]$)

המ"ה הבינומי כאן יהיה $X(m) = m$.

התפלגות פואסונית

כמו במבוא להסתברות, $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ הוא מ"ה המונה את מספר האירועים שקרו בפרק זמן נתון כאשר קצב האירועים הוא λ . במקרה זה, עבור $(\Omega, \mathcal{F})$ כמו קודם, נקבע:

$$P(X=n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$$

תהליך פואסוני הוא תהליך יקרני $N(t)$ הסופר את מספר האירועים שקרו עד זמן t כך $t \geq 0$ כאשר:

$$N(0) = 0$$

א. כל $t \geq 0$ נכך $\{t, t+s\}$ $N(t+s) - N(t) \sim P(\lambda s)$, λ מאוצע האירועים לחיזת זמן.

ב. מספר האירועים בקטעי זמן זרים הם ב"ה.

* פה"ה של $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ היא מדרגית

התפלגות אחידה

התפלגות אחידה $X \sim \text{Unif}(a, b)$ מתאר בחירה אקראית של נקטע (a, b) .

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ כן $S = (a, b)$ ו- $\mathcal{F} = \mathcal{B}((a, b))$ ו- $(s, t) \subseteq (a, b)$

$$P((s, t)) = \frac{t - s}{b - a}$$

המנה האחדית $X(m) = m$ עבור $m \in (a, b)$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a, b) \\ 0 & t \notin (a, b) \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & t \in (a, b) \\ 1 & t \geq b \end{cases}$$

התפלגות מעריכית

הוא $X \sim \exp(\lambda)$ הממשר כמה זמן נמשך תהליך שנמשך בממוצע λ .

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

לענה - $X \sim \exp(\lambda)$ חסר זיכרון: $P(X > a+b | X > a) = P(X > b)$ זהו המנה היחיד המקיים זאת.

לענה - הזמן בין מופעים בתהליך פואסון עם קצב λ מתפלג מעריכית עם פרמטר λ .

טרנספורמציה של התפלגויות

יהי X מנה יש מנה $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ עם פונקציות צפיפות f_x וצפיפות $f_{\psi \circ x}$.

תהא ψ פונקציה מונוטונית עולה מ- $-\infty$ עד $+\infty$ וזוהי:

$$F_{\psi \circ x}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{f_x(\psi^{-1}(y))}{\psi'(\psi^{-1}(y))} dy \quad f_{\psi \circ x}(t) = \left(\frac{f_x \circ \psi^{-1}}{\psi'} \right)(t)$$

אם ψ יורדת, נכפיל את התוצאות הנ"ל ב-1.

אם ψ בורה חתום, ו- ψ^{-1} גזירה ברציפות, אז:

$$f_{\psi \circ x}(t) = f_x(\psi^{-1}(t)) \cdot \left| \frac{d\psi^{-1}(t)}{dt} \right|$$