

חלק I - מרחבי הסתברות

אלגברות 1- ס-אלגברות

תהי Ω קבוצה. נאמן $\mathcal{F}$ סוגר קבוצת החזקה של Ω .

הגדרה - אוסף של תתי קבוצות $\mathcal{F}$ נקרא אלגברה אם מתקיים:

- 1- $\Omega \in \mathcal{F}$
- 2- סבירות למעלה - $E \in \mathcal{F}, \bar{E} \in \mathcal{F}$
- 3- סבירות לאיחוד סופי - $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F}$

אוסף של תתי קבוצות $\mathcal{F}$ נקרא ס-אלגברה אם מתקיים:

- 1- $\Omega \in \mathcal{F}$
- 2- סבירות לאיחוד בן-מנייה - $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F}$
- 3- סבירות לאיחוד סופי - $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F}$

למה - תהי $\mathcal{F}$ אלגברה או ס-אלגברה. אזי $\emptyset \in \mathcal{F}$

למה - תהי $\mathcal{F}$ אלגברה, ויהי $E \in \mathcal{F}$. אזי $E^c \in \mathcal{F}$ (סבירות לחיתוך סופי)

גאומטריה - אוסף, אם $\mathcal{F}$ ס-אלגברה, היא סבירה לחיתוך אינסופי של קבוצות.

למה - כל ס-אלגברה היא אלגברה.
למה - כל אלגברה היא ס-אלגברה.

מרחבי מידה והסתברות

הגדרה - תהי $\mathcal{F}$ אלגברה. פונקציה $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ נקראת מידה אם לכל אוסף סופי של קבוצות זרות $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$ מתקיים:
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k)$$

(אדיטיביות)

תהי $\mathcal{F}$ ס-אלגברה. פונקציה μ נקראת מידה אם לכל אוסף אינסופי של קבוצות זרות $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$ מתקיים התנאי הנ"ל. (ס-אדיטיביות)

למה - תהי $\mathcal{F}$ אלגברה או ס-אלגברה, ו- μ מידה עליה. אז אם $E \in \mathcal{F}$ קיימת $E \in \mathcal{F}$ כך ש- $\mu(E) < \infty$, אזי $\mu(\emptyset) = 0$.

למה - תהינה $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ קבוצות, כך ש- $E_1 \subseteq E_2$. אזי $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.

הגדרה - הפעולה $(\mu, \mathcal{F}, \Omega)$ נקראת מרחב מידה.
הזוג $(\mu, \mathcal{F})$ נקרא מרחב מדין.

הגדרה - תהי $\mathcal{F}$ ס-אלגברה. מידה $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ נקראת מידה אם $\mu(\Omega) = 1$.
הסתברות - אם $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ מרחב מדין, נקרא מרחב הסתברות.
תהי $\mathcal{F}$ מרחב מדין. אזי $\mu(E) \geq 0$ לכל $E \in \mathcal{F}$.
תהי $\mathcal{F}$ מרחב מדין. אזי $\mu(E) \leq \mu(F)$ לכל $E \subseteq F$.
תהי $\mathcal{F}$ מרחב מדין. אזי $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$ לכל $E, F \in \mathcal{F}$ זרות.

ס-אלגברה בורלית

הגדרה - ה-ס-אלגברה הקטנה ביותר המכילה את כל הקבוצות הפתוחות נקראת ה-ס-אלגברה הבורלית ומסומנת $\mathcal{B}$

טענה - $\mathcal{B} = \bigcap_{\mathcal{A}} \mathcal{A}$ כאשר $\mathcal{A}$ אוסף כל ה-ס-אלגברות המכילות את כל הקבוצות הפתוחות. היא ס-אלגברה, ומקיימת את התכונות הנדרשות.

הגדרה - נגזיר מידה μ על $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, כאשר $\mathcal{B}$ אוסף בורל $\mathbb{R}$. מידה זו נקראת מידת לבג ומסומנת λ .

$$\lambda((a, b)) = b - a \quad \text{עבור קטע פתוח } (a, b)$$

$$\lambda(B) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) \mid B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \right\} \quad \text{עבור } B \in \mathcal{B}$$

הערה - אם $\mathcal{B}$ יש הקטע $(0, 1]$, מידת לבג מהווה מידת הסתברות. כאשר נבנה להשתמש בה א קטע באורך אחר, נחלק את מידת לבג במידת הקטע.

תוצאה - מידת לבג היא אכן מידת הסתברות (הגדרה מפורטת בסיטואים).

ס-אלגברה נוצרת

הגדרה - תהייה $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ אוסף קבוצות. ה-ס-אלגברה המנוגעת את $\mathcal{A}$ היא ה-ס-אלגברה הנוצרת, והיא מתקבלת בין היתר ימי חיתוך כל ה-ס-אלגברות המכילות את $\mathcal{A}$. ס-אלגברה זו מסומנת $\sigma(\mathcal{A})$. $\mathcal{A}$ נקראת הצמיגה של ה-ס-אלגברה הנוצרת.

הנייה - באינדוקציה טכנס-פיניטית.

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{T} \cup \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{תהי } \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{B} \quad \text{בסיס}$$

$$\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{ \bar{A} \mid A \in \mathcal{F}_n \} \cup \{ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \mid A_i \in \mathcal{F}_n \}$$

עכס סדר עוקב -

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \quad \text{עכס סדר לבג -}$$

טענה - $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_\infty$, $\mathcal{F}_\infty$ הסודר השבילי הקטן ביותר שיטו קן-מנייה.

טענה - אם לא ניתן "להבחין" בין שתי נצטות באוסף $\mathcal{T}$, אז גם לא ניתן "להבחין" ביניהם ב- $\sigma(\mathcal{T})$.

כוחמלית: תהי Ω קבוצה, $\mathcal{T}$ אוסף מאורעות.
אז אם $\omega \in \mathcal{T}$, $w \in A \Leftrightarrow w' \in A$
אז אם $\omega \in \sigma(\mathcal{T})$, $w \in A \Leftrightarrow w' \in A$