

בוחן סוג טבוע"מ - 12.12. יורה בוחן של שנה ותרומה וא שנתים.
החירה ב א - ו עמדת. עלה חומר עבר.

~~הערה: אופוסטופיה, תרומות, אסאית, קטנות, אקסיומות, תבניות, אקסיומות, תבניות~~

א המבחן יורה עם מחברת פתוח!!!

נושאים - אופוסטופיה
פונקציות - רציפות
קטניות - (+ מסיבתיות)
אקסיומות - הפרדה
אקסיומות - מנייה

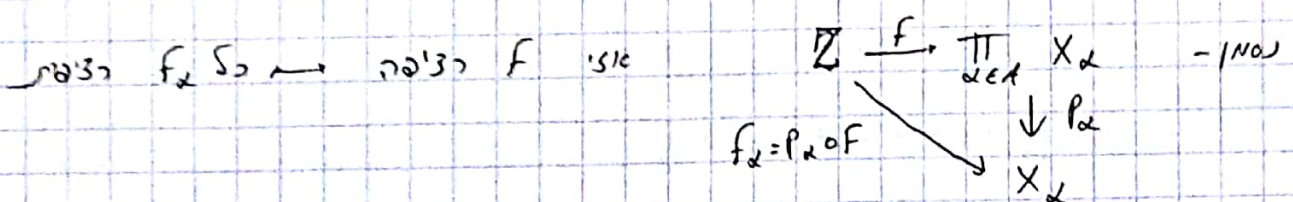
ביון מאלן - הם יחסיטו כמה אחרים

טבוע הבא בזמ שני יורה ששור במקום תבניות.

מבפסה של מרחבים אופוסטופים - המעק

המשק הוכחת המעק

א קטיות מסיבתיות.
סערת עבר - יהיו אלא, X_α , Z , N .



הוכחת הטענת עבר - $\Leftarrow$ מהרבה, טריוויאלי.
 $\Rightarrow$ נקח $U = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ פתוחה בסטית
 אזי:

$$U = U_1 \times \dots \times U_n \times \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

ואז $f^{-1}(u) = f_1^{-1}(u_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(u_n)$
 קיבלנו חיתוך ספי של קבוצות פתוחות. אז זה פתוח.

קונטת המעק - $X = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$, $y = (y_\alpha)_{\alpha \in A}$
 (בנה מסיבות).

$$\varphi_\alpha: [0,1] \rightarrow X_\alpha, \quad \varphi_\alpha(0) = x_\alpha, \quad \varphi_\alpha(1) = y_\alpha$$

$$\varphi = (\varphi_\alpha), \quad \varphi: [0,1] \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

א היא המסילה הנכונה.

משפט - $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, $X \times Y$

- (1) אם X, Y קטורים, $X \times Y$ קטור (אם $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$)
- (2) אם X, Y קטורים מסלית או $X \times Y$ קטורים מסלית (אם $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$)
- (3) אם X, Y T_2 או $X \times Y$ T_2 (אם $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$)
- (4) אם X, Y מקיימת S_2 או $X \times Y$ S_2 (אם $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ יק במקרה הבן מנייה)
- (5) אם X, Y מקיימים scs או $X \times Y$ scs (אם $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ - 11)
- (6) אם X, Y קומפקטים או $X \times Y$ קומפקטים (משפט טיך: $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ אם קומפקטים)
- (7) אם X, Y מטורים, או $X \times Y$ מטורים (אם $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ יק במקרה הבן מנייה)

הוכחה

11 קטורים

שעור: יהי Z מרחב טופולוגי ולכל $z_1, z_2 \in Z$ קיימת $A \in \mathcal{Z}$ כזו ש- $z_1, z_2 \in A$ או Z קטור.
מכאן - תרגיל.

הוכחת המשפט - (10) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. נקח $X \times \{y_1, y_2\} \cup \{x_1, x_2\} \times Y$
~~המקטורים, הוכחה~~
ואם - $(x_2, y_1) \in X \times \{y_1, y_2\} \cup \{x_1, x_2\} \times Y$
ואכן ה' צלבי הנל קטור. וההערה המשפט מתקיים.

(ב) נניח בפעולה $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = U \cup V$, U, V פתוחות זוגיות ואם לקח

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \dots \times u_n \times \prod_{\alpha \neq 1, \dots, n} X_\alpha \subset U$$

$$v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n \times \prod_{\alpha \neq 1, \dots, n} X_\alpha \subset V$$

$$u_1 \times \prod_{\alpha \neq 1} X_\alpha = (u_1 \times X_2) \times \prod_{\alpha \neq 1, 2} X_\alpha$$

$$v_2 \times \prod_{\alpha \neq 2} X_\alpha = (x_1 \times v_2) \times \prod_{\alpha \neq 1, 2} X_\alpha$$

$$y = (y_1, \dots, y_n, z_\alpha) \in V, \quad x = (x_1, \dots, x_n, z_\alpha) \in U$$

נקח
-5

$$x, y \in \overbrace{x_1 \times \dots \times x_n}^{\text{המאונכים}} \times \{z_\alpha\}$$

קטור לפי אינזוקציה $x_1, \dots, x_n$

$$Z = (Z \cap U) \cup (Z \cap V) \quad \text{סתירה}$$

$$x \neq y \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \quad \text{נקוד}$$

$$y = (\dots y_\alpha \dots) \quad x = (\dots x_\alpha \dots) \quad x_\alpha \neq y_\alpha \quad \text{ש } \alpha \text{ כן } \quad x_\alpha \neq y_\alpha$$

$$u \cap v = \emptyset, \quad y_\alpha \in v \in X_\alpha, \quad x_\alpha \in u \subset X_\alpha \quad \text{נקוד סביבות פתוחות זרות}$$

$$y \in \tilde{v} = \prod_{\beta \neq \alpha} x_\beta \times v, \quad x \in \tilde{u} = \prod_{\beta \neq \alpha} x_\beta \times u \quad \text{אז}$$

סביבות פתוחות וזרות במרחב.

(4) S_2

$$\begin{array}{ccc} X-\delta & \text{בסיס} & \{U_n\}_{n=1}^\infty \\ Y-\delta & \text{בסיס} & \{V_n\}_{n=1}^\infty \end{array} \quad \text{בן מנייה} \quad \text{מנייה} \quad X, Y \quad \text{על}$$

$$X, Y-\delta \quad \text{בסיס} \quad \{U_n \times V_m\}_{n,m=1,2,\dots} \quad \text{נקוד}$$

$$X_\alpha-\delta \quad \text{בסיס} \quad \{U_n^{(\alpha)}\}_{n=1}^\infty, \quad \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \quad \text{על}$$

$$\{U_{n_1}^{(\alpha_1)} \times \dots \times U_{n_m}^{(\alpha_m)} \times \prod_{\alpha \in A, \alpha \neq \alpha_i} X_\alpha\}_{m=1,2,\dots} \quad \text{בן מנייה}$$

(5) סביבות

$$A \subset X, \quad B \subset Y \quad \text{בנות מנייה} \quad \text{צפופות}$$

$$A \times B \subset X \times Y \quad \text{צפופה ובת מנייה}$$

$$A_i \subset X_i, \quad \prod_{i=1}^\infty X_i \quad \text{על}$$

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_m, x_m^{(i)}, \dots)\} \quad \text{צפופה ובת מנייה} \quad = A \subset \prod_{i=1}^\infty X_i$$

$$X_0 = (x_i^{(i)}) \quad \text{נקודה קבועה}$$

(7) מטריצות

$$d_2: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_1: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{מטריקס}$$

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)) \quad \text{מטריקס} \quad X \times Y$$

מקסימום מטריקס - כמו סכום, נורמה אינפיניט, וזוהי.

$$d_i: X_i \times X_i \rightarrow \mathbb{R}, \quad \prod_{i=1}^\infty X_i \quad \text{על}$$

$$d((x_i, y_i)) = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)} \quad \text{מטריקס}$$

פרגמט - זהירות שני מטריקס מתואמת.

(א) X, Y קומוסקטיות. $X + Y = \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} U_Y$ כיסוי פתוח

נשים על U_Y - זמנית בסטית U_Y . אם נבנה $\mathcal{U}$ לא $\mathcal{U}_Y$ כיסוי פתוח
 כיסוי של קבוצת הסטיות, ומספיק להוכיח על הכיסוי החזני.
 נניח U היא שכל U_Y בסטיות:
 $U_Y + W_Y = U_Y$, $U_Y \in \mathcal{X}$, $W_Y \in \mathcal{Y}$

נקח נקודה $x \in X$. נסתכל על הסיב $Y \approx \{x\} + Y$ קומוסקטי
 $U_Y \in \mathcal{U}$ אז $U_Y \in \mathcal{U}$ קיים $U_Y \in \mathcal{U}$ כיסוי סופי
 $U_Y + W_Y \subset \bigcup_{i=1}^n (U_{Y_i} + W_{Y_i})$ אז $U_Y \in \mathcal{U}$
 $U_Y + W_Y \subset \bigcup_{i=1}^n (U_{Y_i} + W_{Y_i})$ אז $U_Y \in \mathcal{U}$
 $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ אז $X = \bigcup_{j=1}^m U_{x_j}$
 אז יש מספר סופי של "בסיס" שמכסה X . מספר סופי של קבוצות
 וכן יש כיסוי סופי של $X + Y$

משפט - Tikhonov

יהיו X_α מט קומוסקטיות. אז $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ קומוסקטית.

הוכחה - נשתמש בקריטריון המכוס על מערכת מרוכזת של תת-קבוצות סגורות.
 הקריטריון אומר שאם יש אוסף קבוצות סגורות B_α חיתוך סופי של B_α אינו ריק
 אז החיתוך של כלם לא ריק $\rightarrow$ היות קומוסקטיות.

תהי $\mathcal{B}$ - מערכת מרוכזת של תת קבוצות B_α $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (שחיתוך סופי לא ריק)
 נראה - בקבוצת המרוכזות המוכללת $\mathcal{B}$ קיימת מערכת מרוכזת.

הוכחה - גזימה האמה של $\mathcal{B}$

אם $B \in \mathcal{B}$ אז $B \in \mathcal{B}^{max}$

כל $A \in \mathcal{A}$, נסתכל על $\rho_A(\mathcal{B}^{max})$ מערכת מרוכזת ב- X_A
 $\{ \mathcal{C}(B) \mid B \in \rho_A(\mathcal{B}^{max}) \}$
 נראה שכל $\mathcal{C}(B)$ סגורות -
 קבוצה זו היא עדיין מערכת מרוכזת.

כיון ש- X_A קומוסקטית, קיימת
 המטרה - $\bigcap_{B \in \rho_A(\mathcal{B}^{max})} \mathcal{C}(B) \neq \emptyset$

נבחר $x \in \bigcap_{B \in \rho_A(\mathcal{B}^{max})} \mathcal{C}(B)$

נבדוק שכל $B \in \mathcal{B}^{max}$ וכל סביבה $\mathcal{C}(B)$ של x חותך את B שכן הסביבה לא ריק.
 אז $x \in B$ לכן $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}^{max}} B$

$$x_\alpha \in U_\alpha \quad U_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta \quad (1)$$

$$U_\alpha \cap \rho_\alpha(B) \neq \emptyset \iff (U_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta) \cap B \neq \emptyset \quad (2)$$

נכון כי לפי רגולריות
 $x_\alpha \in cl(\rho_\alpha(B))$ $\rightarrow$ $\exists$ $p \in B$ זה נכון

$$(U_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta) \in B^{max} \quad (3)$$

$$U_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta \cap (B \cap \dots \cap B_m) \neq \emptyset \quad (4)$$

$$U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \dots \times U_{\alpha_m} \times \prod_{\beta \neq \alpha_1, \dots, \alpha_m} X_\beta \in B^{max} \quad (5)$$

סביבה סביבה סביבה
 $\dots X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_m}$

$(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ בס' סביבות של

$$U_{\alpha_1} \times \dots \times U_{\alpha_m} \times \prod_{\beta \neq \alpha_1, \dots, \alpha_m} X_\beta \cap B \neq \emptyset \quad B \text{ סביבה}$$

$$(X_\alpha)_{\alpha \in A} \in cl(B) \quad (6)$$



$$I^n \text{ קוביה} \quad \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \quad \text{קואורדינטות}$$

$$I^\infty = \prod_{i=1}^\infty I_i \quad \text{קואורדינטות!}$$

$$T^n = S^1 \times \dots \times S^1 \quad \text{טורוס}$$

$$\text{טורוס} \quad S^1 \times I$$

מטריצות

מטריצה

כל מרחב טופולוגי רגולרי המקיים את S_2 הוא מטריצלי.

הוכחה - יהי X המרחב.

$$f: X \hookrightarrow I^\infty$$

נבחר הסתקה רגולרית חזרה

$$f: X \rightarrow f(X) \quad \text{הנאיאמורפיק}$$

המטריקה G - X תהיה הצמצום של המטריקה של I^∞

על-פי S_2 - מרחב רגולרי המקיים S_2 הוא טורוס.

הוכחה - נקח F, G סדרות פתח

$$G \subset U_n' \quad U_n \in X \quad U_n \cap U_n' = \emptyset \quad \text{קיימות סביבות}$$

$$U_n' \cap U_m = \emptyset \quad \text{סביבה בסיסית} \quad y \in U_m \quad G \in y \quad \text{קיימת}$$

$$U_n'' = U_m \cap (U_n' \cup U_m) \quad U_n' = U_n \cap (U_n' \cup U_m)$$

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n'' \quad V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n' \quad U_n'' \cap U_m'' = \emptyset \quad \text{אם } m, n \text{ שונים}$$

המרחב X שבו S_2 הוא מטריצלי