

$G_N^{(S_2)}$ Lindelöf $\Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow (5)$
 כ"ס $G_N^{(S_2)}$ סתור, $G_N^{(S_2)}$ קומפקט

אמה זכר אמה נחמי. X קומפלקס. סקאלר. λ וזו $\varepsilon > 0$
קיימת ε גודל סופי

S₂ פתרון קונקרטי של הבעיה.

משפט: יהי X מרחב מטרי, אזי X קומפקט $\Leftrightarrow X$ סגור וחסום.

מפתח: מרחב מטרי קומפקט. הוא חסום
הוכחה: נקח $1 - \epsilon$ סופר A_ϵ המרחק
 נקודות הוא ϵ $\sum_{1 \leq |j| \leq n} p(x_i, x_j) + 2 \cdot |A_\epsilon| - n$
 $\{x_1, \dots, x_n\}$

Scanned by CamScanner

הצגה: A קומפקט $\Leftrightarrow A$ חסומה

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה לפי T_2

לפי A סגורה וחסומה. נבדוק שהיא קומפקטית סדורית.
 מכל סדרה ניתן לבחור תת-סדרה מתכנסת.
 $\{\bar{x}_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ - חסומה $\Rightarrow \{x_n\} \subset (x_0)_1$ - סדרה קובצית (קובצית) $\Rightarrow$ מתכנסת בסדרה חדשה:

$\lim((x_n)_2) = (x_0)_2$ לפי תת-סדרה סגורה $\lim((x_n)_2) = (x_0)_2$

$$\lim(\bar{x}_n) = \bar{x}_0 \in A$$

קומפקטיות: $\{x_1^2 + x_2^2 = 1\} = S_x^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ קומפקטית.
 $D_x^n \subset \mathbb{R}^n$

משפט (חשבה) $S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית $\Leftrightarrow S_2$ סגורה וחסומה.
 $S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה $\Leftrightarrow S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה.

משפט יהי X קומפקטית. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

(א) f חסומה.

(ב) קיימים $x_{\min} \in X$, $x_{\max} \in X$ כגון:

$$f(x_{\min}) = \min_{x \in X} f(x), \quad f(x_{\max}) = \max_{x \in X} f(x)$$

הוכחה: $f(x) \in \mathbb{R}$ - תת קבוצה קומפקטית.
 סגורה, חסומה.

משפט (Lebesgue)

יהי X מרחב מטרי קומפקטית. $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ כיסוי פתוח. U_α קיימים $0 < \epsilon$ כך שכל $D_\epsilon(x)$ (כדור) $\subset U_\alpha$ אחת הקבוצות.

הוכחה: $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ תת-כיסוי סופי.

נבחר $x_i \in U_i$, $F_i = X \setminus U_i$ סגורה פונקציה $f_i(x) = \min_{y \in F_i} \rho(x, y)$.

(א) f_i רציפה ואיננה (תמיד).

(ב) f_i קומפקטית.

(ג) f_i רציפה (תמיד).

$$f(x) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} f_i(x)$$

אם רציפה:

$$\left[\bigcup_{i=1}^n U_i \neq X \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset, x \in F_i, i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow f_i(x) = 0 \right]$$

ק"מ $\min_{x \in X} f(x) = \varepsilon > 0$ נקח $x \in X$ כך $\varepsilon \leq \rho(x, F_i) - \varepsilon$ $\varepsilon \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \rho(x, F_i)$. $D_\varepsilon(x)$ אינו נפגש עם F_i $D_\varepsilon(x) \cap F_i = \emptyset \leftarrow F_i$ מכאן $D_\varepsilon(x) \subset U_i$ כנראה.

היא צורה: X מרתם יחסי, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ נקרא סדרת Cauchy אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך $n, m \geq N$ $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

הצורה: מרתם יחסי נקרא שלם אם כל סדרת Cauchy מתכנסת.

משפט: יהי X מרתם יחסי, אז X קומפקטי $\Leftrightarrow (X, \rho)$ מוסלמית (חסום ואחיד) $\Leftrightarrow$ כל סדרת קיימא ε יחלה סופית.

הוכחה: $X \Leftarrow X$ קומפקטי אז X שלם [קיים, הכל סדרת נ"ך אחריה קרת סדרת מוסלמית $\Leftrightarrow$ סדרת C מתכנסת כלל לאחריה אקסוז (?)

$$X = \bigcup_{i=1}^n D_\varepsilon(x_i) \Leftarrow \text{כיסוי סופי} \quad X = \bigcup_{x \in X} D_\varepsilon(x) \quad \text{נקח } \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow$ חזקים קומפקטיות סקבציאלית. נקח סדרת $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ נקח 1 -תת סדרת סופית Cauchy : נקח 1 -תת סדרת סופית $X = \bigcup_{i=1}^\infty D_1(y_i)$ מכאן אינסוף נקודות הסדרה.

תת סדרה אינסופית. נקח $\frac{1}{2}$ -תת סדרה $\Leftarrow$ קיים $D_{\frac{1}{2}}(y_2)$ כך ε $D_1(y_1) \cap D_{\frac{1}{2}}(y_2)$ מכאן תת סדרה אינסופית. מכאן נקבל סדרת Cauchy ממשית...

מכפלה של מרחבים טופולוגיים
 $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ הצורה: X, Y קבוצות

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{(x_\alpha) : x_\alpha \in X_\alpha\} \quad \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

הכפלה: יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. נגדיר $X \times Y$ כ-
 $\{U \times V : U \subset X, V \subset Y\}$ פתוחים
 $X \times U$ פתוחים $U \subset Y$

הכפלה: $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ אוסף מרחבים טופולוגיים, נגדיר טופולוגיה
 $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ על ידי ציר-בסיס $\{U_\alpha \times V_\beta : U_\alpha \subset X_\alpha, V_\beta \subset X_\beta, \alpha \neq \beta\}$

למה: בסיס טופולוגיית המכפלה $X \times Y$ הוא
 $\{U \times V : U \subset X, V \subset Y\}$ בסיס טופולוגיית המכפלה

המקרה כללי:
 $\left\{ \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \times U_\beta \times \dots \times U_{\beta_n} \right\}$
 $\alpha \in A, \alpha \neq \beta, \dots, \beta_n$

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= x & p_1 : X \times Y &\rightarrow X \\ p_2(x, y) &= y & p_2 : X \times Y &\rightarrow Y \\ p_\beta(x_\alpha) &= x_\beta & p_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha &\rightarrow X_\beta \end{aligned}$$

למה: (1) הכולל p_1 הציקה רציפה (2) טופולוגיית מכפלה היא
 מינימלית בין הטופולוגיות כך שלכל הטופולוגיה רציפה

הוכחה: $p_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\beta$
 $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \times U = p_\beta^{-1}(U)$
 (2) כל p_α רציפה, לכן $p_\alpha^{-1}(U)$ חתך $p_\alpha^{-1}(U)$ פתוח, אבל $U \subset X_\alpha$
 פתוח.

למה: הטופולוגיה $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ היא המינימלית. הוכחה: תמונה על
 קבוצת פתוחים בסיסית $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ פתוחה.

דוגמה (1) $\mathbb{R}^2$ טופולוגיה $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ טופולוגיית מכפלה $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 (2) $\mathbb{R}^n$ טופולוגיה $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ טופולוגיית מכפלה $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$
 $\mathbb{R}^n$

אנחנו נניח X, Y CW ו- $x_0 \in X$ (בצורה $i_{x_0}: Y \rightarrow X \times Y$)

אנחנו נניח $i_{y_0}: X \rightarrow X \times Y$ (בצורה $i_{y_0}(x) = (x, y_0)$)

הוא מיוחס $i_{x_0} \cdot i_{y_0}(x) = (x, y_0)$ (הוא מיוחס $i_{x_0}(y) = (x_0, y)$)

הוכחה: ההצטרף $i_{x_0} \cdot i_{y_0}$ הוא $i_{(x_0, y_0)}$ (בצורה $i_{(x_0, y_0)}(x, y) = (x, y)$)

הוא מיוחס $i_{x_0} \cdot i_{y_0}$ (הוא מיוחס $i_{x_0}(y) = (x_0, y)$)
 $(U \times V) \cap (\{x_0\} \times Y) = \{x_0\} \times V$ (הוא מיוחס $i_{x_0}(y) = (x_0, y)$)
 $(U \times V) \cap (\{x_0\} \times Y) = \{x_0\} \times V$ (הוא מיוחס $i_{x_0}(y) = (x_0, y)$)

משפט: $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, X, Y$: משפט

(1) X, Y קשירים $\Leftrightarrow X \times Y$ קשיר
 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ קשירים $\Leftrightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ קשיר

(2) קשירים $\Leftrightarrow$ מסילת $\Leftrightarrow$ המכפלה קשירה

(3) T_2 $\Leftrightarrow$ המכפלה T_2

(4) S_2 $\Leftrightarrow$ המכפלה S_2 $\Leftrightarrow$ המכפלה S_2

(5) Sep $\Leftrightarrow$ Sep $\Leftrightarrow$ Sep $\Leftrightarrow$ Sep

(6) $Tikhonov$ $\Leftrightarrow$ $Tikhonov$

$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ קשיר $\Leftrightarrow \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ קשיר

(7) $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ קשיר $\Leftrightarrow$ המכפלה CW