

סגור ורציפות סקונדאריים (סדרתיים)

הגדרה - $A \subset X$ תת מרחב.

סגור סקונדארי - $cl_s(A) = \{x \in X \mid x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, a_n \in A\}$

אם $A = cl_s(A)$ אז A סגור סקונדארי.

* הערה - תמיד $A \subset cl_s(A)$, כי לכל $a \in A$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a$.

למה - תמיד $cl_s(A) \subset cl(A)$ אם A סגור אז $A = cl_s(A) = cl(A)$

הוכחה - יש להראות שלם גבול x שייך ל- $cl(A)$. נבחר מהגדרת הסגור.

נוספה - אם x מקיים S_x , אזי $cl_s(A) = cl(A)$ כל $A \subset X$.

* הערה - אם x מילוי או S_2 אזי x מקיים S_x והנוספה מתקיימת.

הוכחה - יש להוכיח שלם $x \in cl(A)$ הוא גבול של סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$
 נקח בסמס סביבות U - x
 נסתכל ב- $U_1, U_2, \dots$ (ק"מ n - S_x)

$V_1 = U_1, V_2 = U_1 \cap U_2, \dots, V_n = \bigcap_{i=1}^n U_i \dots$ ← זהו גבול בסמס סביבות
 קל להראות $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$

נבחר סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: $a_n \in V_n \cap A \neq \emptyset$, אז נקח $a_1 \in V_1 \cap A$
 $a_2 \in V_2 \cap A$, אז נקח $a_2 \in V_2 \cap A$ כי x בסמס

נוכח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$

כל סביבה U של x מקיים N , $a_n \in U$ לכל $n \geq N$

$a_n, a_{n+1}, \dots \in V_n \subset U$ וסיימנו.

הגדרה - רציפות סקונדארי $f: X \rightarrow Y$ נקראת רציפה סקונדארי אם לכל סדרה $x_n \in X$ מתבוננים $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

למה - $f: X \rightarrow Y$ רציפה סקונדארי $\iff$ f רציפה סקונדארי $B \subset Y$ סגורה $B \subset Y$ סגורה סקונדארי $f^{-1}(B)$ סגור סקונדארי

הוכחה - $\Leftarrow$ נניח ש- f רציפה סקונדארי. נקח $B \subset Y$ סגורה סקונדארי סק' ונבדוק ש- $f^{-1}(B)$ סגור סק' ב- X .

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f^{-1}(B)$ ק' ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. $x_0 \in f^{-1}(B)$?

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ $\iff$ $x_0 \in f^{-1}(B)$!

המשפט: הוכחה: $\Rightarrow$ נניח $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. האם $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$?

נניח בהשעיה ש- $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$

קיימת סביבה U של $f(x_0)$, $f(x_{n_k}) \notin U$

נסתכל בקבוצה $B = Y \setminus U$ שאינה אנוני היא סביבה סק'.

אזי $A = f^{-1}(B) \neq \emptyset$ סקורה סק'.

אזי- $f(x_{n_k}) \in B, x_{n_k} \in f^{-1}(B) = A$

ונקבל $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in f^{-1}(B) = A$
 $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ A & \Rightarrow & A \end{matrix}$

אז $f(x_0) \in B$ סתירה.

משפט - (1) אם $f: X \rightarrow Y$ רציפה אזי f רציפה סקוונציאלית.
 (2) בהנחה ש- X מקיים את S_1 , נא $f: X \rightarrow Y$ רציפה סק' היא רציפה.

הוכחה - (1) רציפה f נקח $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ונראה ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

לכל סביבה $U \subset Y$ של $f(x_0)$, $x_0 \in f^{-1}(U)$ סביבה פתוחה סק' קיים N כך שעל $N \geq n, x_n \in f^{-1}(U) \iff x_n \in f^{-1}(U) \iff f(x_n) \in U$!

(2) נקח $B \subset Y$ סביבה ונראה ש- $f^{-1}(B)$ סביבה.
 $\downarrow$
 B סביבה סק' $\leftarrow f^{-1}(B)$ סביבה סק' $\downarrow$
 S_1

ע ההרה - אם X מקיים את S_2 אז רציפות $\iff$ רציפות סק'.

קומפקטיות

הצורה - מרחב טופולוגי X נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ קיים תת כיסוי סופי: $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$

דוגמה - המשפט הייני-בורס - קטע סגור הוא קומפקטי.
 הוכחה - נספיק להוכיח עבור $I = [0,1]$ (כי קומפקטיות נשמרת תחת המינימום והמקסימום)

$[0,1] = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$
 נגדיר $[0,1] \ni t_0$ כך ש- $\{t \in [0,1] \mid [0,t] \text{ מכוסה סופית}\}$ $\sup t_0 = 1$
 לא ריקה מפני שעבור $t=0, [0,0] = \{0\} \in U_\alpha$

נראה ש- $t_0 = 1$.
 נניח בהשעיה ש- $t_0 < 1$, $t_0 \in U_\alpha$, $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset U_\alpha$

$$[0, t_0 + \frac{\epsilon}{2}] = \underbrace{[0, t_0 - \frac{\epsilon}{2}]}_{\text{מכוסה סופית}} \cup \underbrace{[t_0 - \frac{\epsilon}{2}, t_0 + \frac{\epsilon}{2}]}_{\subset U_\alpha}$$

מכוסה סופית

אז $t_0 + \frac{\epsilon}{2} > t_0$ סתירה.

הוכחה - X קבוצה, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$ אוסף תתי קבוצות.
 האוסף קרוי מחזור אם $\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha \neq \emptyset$ סופי.

למטה - X מ"ט קומפקטי $\iff$ לכל אוסף סגור ומחזור $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$, החיתוך $\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha \neq \emptyset$.
 הוכחה: $\leftarrow$ X קומפקטי, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$ סגור ומחזור.
 נניח בנסיגה ש-

$$\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha = \emptyset$$

$$\bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus A_\alpha) = X \quad \text{אז}$$

$\downarrow$
 U_α פתוח.

$$\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = X \quad \text{ואז יש}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_{\alpha_i} = \emptyset \quad \text{האוסף אינו מחזור, סתירה.}$$

$\Rightarrow$ אולי דבר. תרגיל.

למטה - יהי X מ"ט, $A \subset X$ תתי מחזור.
 A קומפקטי $\iff$ לכל $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ קיים תת כיסוי סופי $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.
 הוכחה - תרגיל.

למטה - יהי X מ"ט קומפקטי, $A \subset X$ סגורה. אזי A קומפקטית.
 הוכחה - נקח כיסוי פתוח $\tilde{U} = X \setminus A$, $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. אזי -

$$\tilde{U} \cup \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X \quad \text{קיים תת כיסוי סופי של } X$$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \quad \text{אז} \quad \tilde{U} \cup \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = X$$

למטה - יהי X מ"ט בעל T_2 או Hausdorff, אזי $A \subset X$ קומפקטית הובא סגור.

הוכחה - לבדוק ש- $A \setminus X$ - קבוצה פתוחה.
 נקח $x \in X \setminus A$ ונבנה סביבה U_x כך ש- $U_x \cap A = \emptyset$.
 לכל $y \in A$ קימות סביבות U_y ו- V_y ש- $U_y \cap V_y = \emptyset$, $y \in V_y$, $x \in U_y$.

$$A \subset \bigcup_{y \in A} U_y \quad \text{כן, } A \subset \bigcup_{y \in A} V_y$$

$$U \cap A = \emptyset, \quad x \in U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i} \quad \text{אז}$$

למטה - יהי $F: X \rightarrow Y$ רציפה. $A \subset X$ קומפקטית $\iff F(A) \subset Y$ קומפקטית.

$$F(A) \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subset Y \quad \leftarrow \quad A \subset \bigcup_{\alpha \in A} F^{-1}(U_\alpha) \subset X$$

$$\downarrow$$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n F^{-1}(U_{\alpha_i}) \quad \longrightarrow \quad \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \supset F(A)$$

סדרה - תהי $f: X \rightarrow Y$ תצורה. אזי f העתקה סדרה (תמונה של קבוצה סדרה היא סדרה)
 $\downarrow T_2$ ל קומפקט

הוכחה - $A \subset X$ סדרה $\leftarrow A$ קומפקטית $\leftarrow f(A) \subset Y$ קומפקטית
 $\downarrow T_2$
 $f(A) \subset Y$ סדרה.

מעטפת - תהי $f: X \rightarrow Y$ תצורה, חזק, וזל. $f \leftarrow$ חומיאורפיזם.
 $\downarrow T_2$ ל קומפקט

הוכחה - $f^{-1}: Y \rightarrow X$ קיימת מחזק וזל.
 f סדרה $\leftarrow$ המקור של כל קבוצה סדרה סדר (ב- f^{-1}), וזל העתק תצורה.

מסקנה - $f: X \rightarrow Y$ תצורה, חזק, אזי $f: X \rightarrow f(X)$ חומיאורפיזם.
 $\downarrow T_2$ ל קומפקט

קבוצה - $\mathbb{R}$ אינו קומפקט:
 $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n-\epsilon, n+1+\epsilon) = \mathbb{R}$
 לא ניתן להסיר את קטע.

קומפקטיות מקומית וקומפקטיות חזק-קבוצתיות

הערה - X קרא ~~קומפקטיות מקומית~~ קומפקטיות מקומית אם לכל $x \in X$ קיימת סביבה U של x כך ש- U קומפקטית.
 $x \in U \subset X$ קומפקטיות מקומית

למשל: x קומפקטית $\leftarrow x$ קומפקטיות מקומית.

קבוצה - $\mathbb{R}$ קומפקטיות מקומית - $x \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$, $[x-\epsilon, x+\epsilon]$ קומפקטית.

הערה - יהי X טופולוגיה קומפקטיות מקומית (ובזל T_2 Hausdorff).
 נגזיר $Y = X \cup \{p_\infty\}$ סופי:
 $\mathcal{R}_X \cup \{C \cup Y\} = \mathcal{R}_Y$
 כל $C \subset X$ קומפקטית

סדרה - $\mathcal{R}_Y$ טופולוגיה

הוכחה - (1) $\bigcup_{i=1}^n C_i \subset X$ אם קומפקטית

(2) $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \subset X$ אם קומפקטית

1- $C_1, C_2 \supset \bigcup_{p \in B} U_p$ פתוח

$C_2 \supset \bigcup_{j=1}^k U_{p_j}$, $C_1 \supset \bigcup_{j=1}^k U_{p_j}$, אזי $C_1, C_2 \supset \bigcup_{j=1}^k U_{p_j}$

2- $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$ סדרה $\leftarrow$ קומפקטיות.

קבוצה - אם X קומפקטית אזי $\mathcal{R}_\infty$ - נחצה פתוח ב- Y .

משפט - אם X לא קומפקטי, אבל קומפקט מיקומית ובעל T_2 , אזי $Y = X \cup \{p_\infty\}$ הוא קומפקט בעל T_2 ו- $X \subset Y$ תת מרחב בטופו המועדית.

הוכחה - וו קומפקטיות.

$$p_\infty \in U_{p_\infty} = Y \setminus C, \quad \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = Y$$

'קומפקטיות' ב- X

$$C \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

$$\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \cap C \neq \emptyset \iff \bigcup_{\alpha \neq p_\infty} (U_\alpha \cap C) \neq \emptyset$$

ניסוי פתוח

$$U_{p_\infty} \cup \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = Y$$

(2) T_2

$$x \in U \subset X \quad \text{קיימת}$$

$$cl(U) = C \subset X$$

קומפקט

$$U \cap V = \emptyset$$

$$V = Y \setminus C \ni p_\infty$$

דוגמה - $X = \mathbb{R}$
 $Y = S$, אזי

הסרה - Y משמר באופן יחיד עד כדי הומומורפיזם.

מרחבי S_2 קומפקטים

הצורה - יהי X מ"ט, $A \subset X$, נקודה $x \in X$ נקראת נקודת הצטברות אינסופית עבור A אם לכל סביבה $U \ni x$ החיתוך $|U \cap A| = \infty$

למה - יהי X בעל T_1 , $A \subset X$ סגורה. אזי כל נקודה $a \in A$ היא או מבודדת או נקודת הצטברות אינסופית.

הוכחה - תרגיל

- הצורה -
- (1) X נקרא קומפקט קצוותיות אם לכל סדרה קיימת תת-סדרה מתכנסת
 - (2) X נקרא קומפקט קאונטבילי אם מכל כיסוי פתוח בן מנייה ניתן לבחור תת כיסוי סופי
 - (3) X נקרא קווי קומפקט אם לכל סדרה יורדת של תתי קבוצות סגורות החיתוך לא ריק.

משפט - יהי X מ"ט בעל S_2 .

אזי הדברים הבאים שקולים:

- (1) X קומפקט
- (2) לכל $A \subset X$ אינסופית קיימת נקודת הצטברות אינסופית.
- (3) X קומפקט סק
- (4) X קווי - קומפקט
- (5) X קומפקט קאונטבילי