הרצאה 4

אקסיומת הפרדה

תזכורת משיעור קודם: $T_0 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow \underbrace{T_3 + T_1}_{\text{רגולריות}} \Rightarrow \underbrace{T_4 + T_1}_{\text{נורמליות}}$

מרחב מטרי תמיד נורמלי.

גזירה חשובה:

הפרדה - הפרדה בפונקציות

1 - מ"ט X מקיים F_3 אם לכל נקודה $x \in X$ וקבוצה סגורה $x \notin A \subset X$ קיימת פונקציה רציפה:

$$f: X \to \mathbb{R}$$

כך ש- $f(x) = 0$, $f|_A \equiv 1$

הערה - $x \in f^{-1}(-\infty, \frac{1}{2})$, $A \subset f^{-1}(\frac{1}{2}, \infty)$

2 - מ"ט X מקיים את F_4 אם לכל שתי קבוצות סגורות זרות $A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$ קיימת פונקציה רציפה:

$$f: X \to \mathbb{R}$$

כך ש- $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$

משפט Urysohn - $T_4 \iff F_4$

הוכחה - $\Rightarrow$ לוקחים סביבות $A \subset f^{-1}(-\infty, \frac{1}{2})$, $B \subset f^{-1}(\frac{1}{2}, \infty)$ וסיימנו.

$\Leftarrow$ נניח ש- T_4 מתקיימת.

נקח $A, B \subset X$ סגורות זרות ונבנה פונקציה רציפה $f: X \to [0,1]$

כך ש- $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$

נגדיר סדרה של סביבות פתוחות של A $\{U_r\}$ לכל $r = \frac{k}{2^n} \in [0,1]$

כך שלכל $r_1 < r_2$:

$$cl(U_{r_1}) \subset U_{r_2}$$

או - $U_1 = X \setminus B$

ב - בונים את U_0 ע"פ: T_4 קיימת סביבות פתוחות U_0 של A, $B \subset V_0$

מתק"מ - $cl(U_0) \subset X \setminus V_0 \subset X \setminus B = U_1$

ג - בעזרת אינדוקציה - מהינתן U_{r_1}, U_{r_2} כך ש- $r_1 < r_2$ $cl(U_{r_1}) \subset U_{r_2}$

נבנה את $U_{\frac{r_2+r_1}{2}}$.

נסמן $A_{r_1} = cl(U_{r_1})$, $B_{r_2} = X \setminus U_{r_2}$. שתי קבוצות סגורות וזרות.

לפי T_4 קיימת סביבות פתוחות וזרות $A_{r_1} \subset U'$, $B_{r_2} \subset V'$

נגדיר:

$$U' = U_{\frac{r_2+r_1}{2}}$$

צריך להראות - $cl(U_{\frac{r_2+r_1}{2}}) \subset U_{r_2}$, $cl(U_{r_1}) \subset U_{\frac{r_2+r_1}{2}}$

בדיקה: תרגיל. (לפי הגדרה)

Scanned by CamScanner

המשך הוכחה: הנה את f.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ \inf\{r : x \in U_r\} & \text{ש.ש.} \end{cases}$$

נניח כי f רציפה ומקיימת $f|_A = 0$, $f|_B = 1$ (נתון) ↩ $A \subset U_r$

רציפות: מספיק להראות כי גם הקבוצה $f^{-1}((\alpha,0])$, $f^{-1}([1,\alpha))$ פתוחה ב-X.
(הקבוצות הן פרי-אימג'ים של הטופולוגיה הקנונית)

נראה ש- $f^{-1}((\alpha,0]) = \bigcup_{r<\alpha} U_r$:

$x \in f^{-1}((\alpha,0])$ $\Leftarrow$ $f(x) < \alpha$ $\Leftarrow$ קיים r כך ש- $f(x) < r < \alpha$
$\Leftarrow$ $x \in U_r$ (מהגדרת f)
$r < \alpha$, $x \in U_r$ $\Leftarrow$ $f(x) \in [0,r)$ $\Leftarrow$ $x \in f^{-1}([0,r))$
↩ שמוכלת f

נסתכל על $f^{-1}([\alpha,1]) = X \setminus \bigcup_{r<\alpha} U_r$

נקח $x \in f^{-1}([\alpha,1])$ $\Leftarrow$ $f(x) \geq \alpha$ $\Leftarrow$ $r < \alpha \leq f(x)$
$\Leftarrow$ $x \notin U_r$ $\Leftarrow$ $x \notin \overline{U_r}$ $\Leftarrow$ $x \in X \setminus \bigcup_{r<\alpha} \overline{U_r}$

$x \in X \setminus \bigcup_{r<\alpha} \overline{U_r}$ $\Leftarrow$ $x \in \bigcup_{r<\alpha} (X \setminus \overline{U_r})$ $\Leftarrow$ יש $r<\alpha$ כך ש-$x \in X \setminus \overline{U_r}$
$\Leftarrow$ $f(x) \geq r > 0$ $\Leftarrow$ $x \in f^{-1}([\alpha,1])$.

□

משפט Tietze – יהי X מ"ט המקיים את T_4.
1) $A \subset X$ תת-קבוצה סגורה ו- $f : A \to [a,b]$ רציפה.
אזי קיימת הרחבה $F : X \to [a,b]$ רציפה כך ש- $f = F|_A$
2) אם $f : A \to \mathbb{R}$ אז קיימת $F : X \to \mathbb{R}$ רציפה כך ש- $f = F|_A$

הוכחה: (משפט U + טריק של $\log$)
א- נתון שקיימת $[a,b] = [-1,1]$

נסתכל על הקבוצות $A_1 = f^{-1}([-1,-\frac{1}{3}])$, $B_1 = f^{-1}([\frac{1}{3},1])$
(זרות מ-X) (סגורות ב-A)

לפי משפט U. קיימת פונקציה $g_1 : X \to [-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$, $g_1|_{A_1} = -\frac{1}{3}$, $g_1|_{B_1} = \frac{1}{3}$
שמקיימת כי:
1- $|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$ לכל $x \in A$
2- $|g_1(x)| \leq \frac{1}{3}$ לכל $x \in X$

נגדיר $f_1 : A \to [-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$, $f_1(x) = f(x) - g_1(x)$

נסתכל על: $A_2 = f_1^{-1}([\frac{2}{3},\frac{2}{3}])$, $B_2 = f_1^{-1}([-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}])$

משפט U. נקבל $g_2 : X \to [-\frac{2}{3^2},\frac{2}{3^2}]$ כך ש- $g_2|_{A_2} = -\frac{2}{3^2}$, $g_2|_{B_2} = \frac{2}{3^2}$
כאשר:
1- $|f(x) - g_2(x)| \leq (\frac{2}{3})^2$ לכל $x \in A$
2- $|g_1(x)| \leq \frac{2}{3^2}$ לכל $x \in X$

Scanned by CamScanner

המשך ההוכחה - ממשיכים כך: $f_1 = f - g_1$, $f_2 = f_1 - g_2$, ... $f_{n+1} = f_n - g_{n+1}$

לכל n נשמר:
1 - $|f_n(x) - g_{n+1}(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$, $x \in A$.
2 - $|g_{n+1}(x)| \le \frac{2^n}{3^{n+1}}$, $x \in X$

כך $g_1, g_2, \ldots$ רציפות. הטור מתכנס במידה שווה לפי F רציפה.
(מ- M-בוחן) עפ"י ויירשטראס מחזקו 2)

ב- $|F(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = 1$

ג- אם $x \in A$ אזי $F(x) = f(x)$

$f(x) - g_1(x) - \ldots - g_n(x) = f_n(x)$

$|f_n(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x)| \le |f_n(x) - g_{n+1}(x)| + \sum_{k=n+2}^{\infty} |g_k(x)| \to 0$ ...

$\downarrow$

תיבעל למה לה שווה ל- 0.

אקסיומת הפרדה

הגדרה - מ"ט X מקיים את S_2 אם קיים בסיס טופולוגיה בן מניה.

דוגמה - $\mathbb{R}^n$ מקיים את S_2: $\mathcal{B} = \{D_r(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, 0 < r, r \in \mathbb{Q}\}$

הגדרה - יהי X מ"ט, $x \in X$.
אוסף סביבות פתוחות של x $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ נקרא בסיס סביבות של x אם לכל סביבה $x \in U$ קיימת $x \in U_\alpha \subset U$.

מ"ט X מקיים את S_1 אם לכל נקודה $x \in X$ ק"מ בסיס סביבות בן מניה.

דוגמה - כל מרחב מט"ר מקיים את S_1. בסיס סביבות: $\mathcal{B} = \{D_x(r) \mid r \in \mathbb{Q}\}$

משפט - $S_2 \Rightarrow S_1$

הוכחה - יהי $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס טופולוגיה.
נקח $x \in X$. $\{U_n \in x : U_n\}$ בסיס סביבות.

דוגמה - $S_1 \not\Rightarrow S_2$
נקח $X = \mathbb{R}$ עם טופולוגיה דיסקרטית

הגדרה - מ"ט X מקיים את Sep (מרחב הפרדה) אם קיימת לכל $x \neq y$ בקבוצה X סביבה U של x וסביבה V של y כך ש- $U \cap V = \emptyset$.

משפט - $S_2 \Rightarrow Sep$

הוכחה: $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס טופולוגיה.
נקח נקודה $x_n \in U_n$, $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. למה A בסופה? מעיקרון השובך שני איברים.

Scanned by CamScanner

דוגמאות: 1- $S_1 + Sep \Rightarrow S_2$

$\mathbb{R}_l$: Sep : $\mathbb{Q}$

S_1: $[x, r_2)$, $r_2 > x$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$

אומן S_2 לא מתקיים:

יהי $[a, b)$ $a \in \mathbb{Q}$. אי אפשר לקבל קבוצה כזו שהיא גם אוויתך, אבל היא חייבת להיות בפסים. אבל a לא נמצאת כאלה.

2- $S_1 \not\Rightarrow Sep$

$\mathbb{R}$ עם טופולוגיה דיסקרטית.

3- $Sep \not\Rightarrow S_1$

$\mathbb{R}$ עם טופולוגיה קופית.

$A = \mathbb{Q}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \neq x_0 \; \{x\} \setminus \mathbb{R}$ פתוחה

משפט- תהי $f: X \to Y$ רציפה ועל X מקיים את Sep.
אזי Y מקיים את Sep.

הטענה- $A \subset X$ צפופה בת מניה. נסמן $F(A) \in Y$ ... תרגיל.

הגדרה- נאמר עבור S_1, S_2

משפט- יהי X מרחב מטרי. אזי $S_1 \iff S_2$

הוכחה- $\Leftarrow$ יהי $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ צפופה ב-X.

מאיזם $\{D_{x_n}(\frac{1}{m})\}$ אוסף בן מניה של קבוצות פתוחות.

נבדוק שמדה בסיס. קרוטרון - לכל x פתוחה ולכל $U \ni x$ קיימת קבוצה בסיסית U_0, $U \subset U_0 \ni x$.
קיים $D_x(\varepsilon) \subset U$
קיימת $D_x(\frac{1}{m}) \ni x_m$. נסתכל בכדור

$$x \in D_{x_m}(\tfrac{1}{m}) \subset D_x(\varepsilon)$$

משפט- אם X מקיים את S_1 או S_2 אזי כל $A \subset X$ בטופולוגיה המושרית מקיימת את S_1 או S_2 בהתאמה.

הוכחה- ברור.

הגדרה- לא נכון ל-Sep. דוגמאות בתרגול.

Scanned by CamScanner

מסקנה – אם X מרחב מטרי ו- sep אז לכל $A \subset X$ מקיים את sep.

הוכחה – X מקיים את sep $\Rightarrow$ X מקיים את S_2

$\Downarrow$

A מקיים את sep $\Rightarrow$ A מקיים את S_2

הגדרה – כיסוי פתוח

X מ"ט, $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ אוסף קבוצות פתוחות כך ש- $X = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ נקרא כיסוי.

תה' $A' \subset A$.

$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A'}$ נקרא תת-כיסוי אם $X = \bigcup_{\alpha\in A'} X_\alpha$

משפט Lindelöf – יהי X מ"ט בעל S_2.

אזי מכל כיסוי פתוח ניתן להפיק תת כיסוי בן מניה.

הוכחה – יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ כיסוי פתוח.

מ-S_2 יש $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס טופולוגיה.

לכל נקודה $x \in X$, $x \in X_\alpha$ אקסיומת $U_n \subset X_\alpha$. $n = n_x$ $\alpha = \alpha_n = \alpha_{n_x}$.

אוסף $\{X_{\alpha_n}\}$ תת כיסוי.

Scanned by CamScanner