

4. חרצת

הוכחה: יהי β כלשהו על $\mathcal{P}$. ניקח α, β, γ כש
 $\beta \leq \gamma$ ו- $\alpha \leq \beta$. הוכחה שמה וההיפוך שמה
 ש"ל (ההיפוך) שמה $\beta \leq \gamma$ ו- $\alpha \leq \beta$ —
 $\beta \leq \gamma$ — $\beta \leq \gamma$ ו- $\alpha \leq \beta$ שמה $\beta \leq \gamma$ ו- $\alpha \leq \beta$
 וכן, $\beta/\gamma \leq \alpha/\beta$ הוכחה שמה וכן $\beta/\gamma \leq \alpha/\beta$ וכן

□

$\lim_{L \rightarrow \infty} \sigma_L(x) = \prod_{\substack{\sigma: L \rightarrow K \\ \sigma_L = id}} \sigma(x)$
 הגדרת הפונקציה והיא נקראת פונקציה חזקה.

שאלה: יהי B חבורה, $Q_1, \dots, Q_n$ קבוצות זרים, $Q_i + Q_j = B$ לכל i, j , הוכיח: B חבורה.

Somit ist $b + \sum_{i=1}^n Q_i \mapsto (b + Q_1, \dots, b + Q_n)$ ist surjektiv

הוכחה: קבוצת כל המספרים השלמים.
 נסתקף: (אנחנו)
 $\cap Q_i = \prod Q_i$ כל Q_i, Q_j זוגיים.

הוכחה: נראה ש $\prod Q_i \subseteq \cap Q_i$. יהיה $q \in \prod Q_i$. נבחר $q_i \in Q_i$ עבור $i=1, \dots, k$.
 $q = 1 \cdot q = (q_1 + q_2) \cdot q = q_1 q + q_2 q \in Q_1 Q_k$
 כל $q \in \prod_{i=1}^k Q_i = \prod_{i=1}^{k-1} Q_i \cdot Q_k$

יש להוכיח ש Q_k, J זוגיים.
 $B = B^{k-1} = \prod_{i=1}^{k-1} (Q_i + Q_k) \subseteq J + Q_k \subseteq B$

$J \cap Q_k = J Q_k = \prod_{i=1}^k Q_i$
 נסתקף: נסתקף את J ונראה ש $J \cap Q_k = \prod_{i=1}^k Q_i$.
 $I = \bigoplus_{i=1}^k Q_i$
 $\mu \in M \rightarrow (\mu + Q_i)_{i=1}^k$
 $M/I_M \cong \bigoplus M/Q_i M$

הוכחה: נראה ש $I_M = 0$.
 $M/I_M \cong M/Q_i M$

$u_1, \dots, u_k \in B$ הם זוגיים, נסתקף את B .

$u_i = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \pmod{Q_j}$ $(= \delta_{ij})$
 $f_i: M \rightarrow u_i M$ $f_i(u) = u_i u$
 $\ker f_i = Q_i M$

$(1-u_i)u \in Q_i M$ $\forall u \in M$ $\Rightarrow u = (1-u_i)u$ $\Rightarrow u_i u = 0$
 $\bigcap_{i=1}^k Q_i M \subseteq \ker f_i \subseteq Q_i M \subseteq I_M = 0$

$$M = \bigoplus u_i M \text{ - נכון רק, } M/I M \cong u_i M \quad | \text{ דל}$$

$$\text{נסה } \Rightarrow f_1 + \dots + f_k : M \rightarrow M$$

$$1 = u_1 + \dots + u_k \pmod{I}$$

$$u = u_1 m + \dots + u_k m$$

$$u = u_1 m_1 + \dots + u_k m_k$$

$$u_i^2 m_i = u_i m = u_i^2 m_i = u_i m_i$$

$$u_i^2 = 1 \pmod{p_i}$$

□

$$(u_i^2 - 1) m_i = 0 \pmod{p_i} \text{ - (131)}$$

3.3 - תהיה פתרון ואינך

נקודות פתרון - יהי P הוא כל המסלולים של K - נניח

יהי L/K המרחב של המסלולים, ויהי S' המרחב של המסלולים

$$L = \bigoplus_{i=1}^n P_i$$

$$L = \bigoplus_{i=1}^n P_i, \text{ Frac } S' = L \text{ - נניח}$$

$$S' = \{ f(x) \in K[x] \mid f(x) \in L \}$$

$$(f(x) - g(x)) \cdot \alpha \in L \text{ - נניח}$$

$$K \cong P$$

$$\text{נסה: } (P \ni a_i, b_i) \quad \alpha^n + \frac{a_1}{b_1} \alpha^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$- \text{נניח } b_1, \dots, b_n \text{ - נניח}$$

$$b \alpha^n + a_1' \alpha^{n-1} + \dots + a_n' = 0 \quad | \cdot b^{n-1}$$

$$(b\alpha)^n + a_1' (b\alpha)^{n-1} + \dots + b^{n-1} a_n' = 0$$

$$\alpha \in \text{Frac}(S') \Leftarrow b\alpha \in S' \text{ - נניח}$$

$$b \in P, \text{ נניח}$$

? S' - נניח P - נניח

אם $\beta \in \text{Spec}(S)$ אז $p = \beta \cap R$ הוא אידיאל ראשוני ב- R .
 - $\beta = pR_p$ (המשפט של גילברט-נוטמן)
 - $\beta = pR_p$ (המשפט של גילברט-נוטמן)

השדה $K(p) = R_p/pR_p = \text{Frac}(R/p)$
 - $K(p) \hookrightarrow L(p)$ (השדה המוכלל)
 - $S \rightarrow S/pS$ (השדה המוכלל)

המשפט של גילברט-נוטמן
 - $R_p/pR_p \cong \text{Frac}(R/p)$

הוכחה: נניח S/pS הוא שדה. אז R/pR הוא שדה.
 - $R/pR \cong \text{Frac}(R/p)$ (המשפט של גילברט-נוטמן)

$$x = \frac{s}{r}$$

$$\bar{s} \in S/pS, \bar{r} \in R/pR \Rightarrow \bar{r}^{-1} \in R/pR$$

אם $\beta \subseteq \alpha$ אז $R_\beta \subseteq R_\alpha$.
 - $R_\beta/pR_\beta \subseteq R_\alpha/pR_\alpha$ (המשפט של גילברט-נוטמן)

הוכחה: נניח R/pR הוא שדה. אז R_β/pR_β הוא שדה.
 - $R_\beta/pR_\beta \cong \text{Frac}(R/p)$ (המשפט של גילברט-נוטמן)

המשפט של גילברט-נוטמן
 - $R_p/pR_p \cong \text{Frac}(R/p)$

הוכחה: נניח R/pR הוא שדה. אז R_β/pR_β הוא שדה.
 - $R_\beta/pR_\beta \cong \text{Frac}(R/p)$ (המשפט של גילברט-נוטמן)

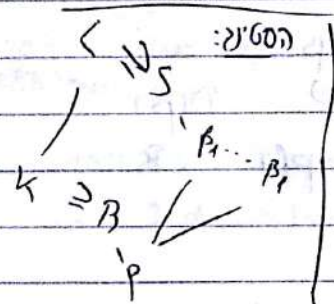
אם $p \in \text{Spec}(R)$ אז R_p/pR_p הוא שדה.
 - $R_p/pR_p \cong \text{Frac}(R/p)$ (המשפט של גילברט-נוטמן)

הוכחה: נניח R/pR הוא שדה. אז R_p/pR_p הוא שדה.
 - $R_p/pR_p \cong \text{Frac}(R/p)$ (המשפט של גילברט-נוטמן)

הוכחה: $\sigma \in \text{Aut}(K/k)$ ו- $\beta \in \text{Spec}(R)$ אז $\sigma(\beta) \in \text{Spec}(R)$.
 $\square$

נניח K/k נורמלית ו- $\beta \in \text{Spec}(R)$. אז $\sigma(\beta) = \beta$ לכל $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$.

① נניח $\beta \in \text{Spec}(R)$ ו- $\sigma(\beta) = \beta$ לכל $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$. אז $\beta \in \text{Spec}(R)$ ו- $\sigma(\beta) = \beta$ לכל $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$.
 ② נניח $\beta \in \text{Spec}(R)$ ו- $\sigma(\beta) \neq \beta$ לכל $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$. אז $\beta \in \text{Spec}(R)$ ו- $\sigma(\beta) \neq \beta$ לכל $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$.



נניח $G = \text{Gal}(K/k)$ ו- $\beta \in \text{Spec}(R)$. אז $\sigma(\beta) = \beta$ לכל $\sigma \in G$. אז $\beta \in \text{Spec}(R)$ ו- $\sigma(\beta) = \beta$ לכל $\sigma \in G$.

הוכחה: $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$ ו- $\beta \in \text{Spec}(R)$. אז $\sigma(\beta) \in \text{Spec}(R)$. אז $\sigma(\beta) = \beta$ לכל $\sigma \in G$. אז $\beta \in \text{Spec}(R)$ ו- $\sigma(\beta) = \beta$ לכל $\sigma \in G$.

הוכחה: $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$ ו- $\beta \in \text{Spec}(R)$. אז $\sigma(\beta) \in \text{Spec}(R)$. אז $\sigma(\beta) = \beta$ לכל $\sigma \in G$. אז $\beta \in \text{Spec}(R)$ ו- $\sigma(\beta) = \beta$ לכל $\sigma \in G$.

נניח $\beta \in \text{Spec}(R)$ ו- $\sigma(\beta) = \beta$ לכל $\sigma \in G$. אז $\beta \in \text{Spec}(R)$ ו- $\sigma(\beta) = \beta$ לכל $\sigma \in G$. אז $\beta \in \text{Spec}(R)$ ו- $\sigma(\beta) = \beta$ לכל $\sigma \in G$.

$$\mathcal{O}_\beta = \{ \beta_1, \dots, \beta_r \} = \frac{\mathcal{O}_K}{\mathfrak{p}}$$

נניח $\alpha \in \mathcal{O}_K$ ו- $\alpha \notin \mathcal{O}_\beta$. אז $\alpha \notin \mathcal{O}_\beta$ ו- $\alpha \notin \mathcal{O}_\beta$.

$$R \ni x = \text{Norm}_{K/k}(\alpha) = \alpha \prod_{\sigma \in G} \sigma(\alpha) \in \mathcal{O}_K \cap R = \mathcal{O}_\beta$$

נניח $x \notin \mathcal{O}_\beta$ ו- $x \notin \mathcal{O}_\beta$. אז $x \notin \mathcal{O}_\beta$ ו- $x \notin \mathcal{O}_\beta$. אז $x \notin \mathcal{O}_\beta$ ו- $x \notin \mathcal{O}_\beta$.

$$\mathbb{Z} \rightarrow \text{mod } 13 = \mathbb{Z}/13$$

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[i]$$

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$$

$$L(p) = \mathbb{Z}[i]_{(p)} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ if } p \neq 2, \text{ else } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$K(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad 2 = -i(1+i)^2, \quad 2 = (1+i)(1-i) \quad p=2 \quad (1)$$

$$\text{Gal}(L(p)/K(p)) = 1 \text{ if } p \neq 2$$

$$I(p) = D(p) \text{ if } p \neq 2, \quad D(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad \langle 1-i \rangle = \langle 1+i \rangle = p$$

$$\mathbb{Z}[i]_{(p)} \cong \mathbb{F}_p[x]/x^2+1, \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathbb{F}_3, \quad p=3 \quad (2)$$

$$D(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad \text{if } p \neq 2, \text{ else } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$I(p) = 1 \text{ if } p \neq 2, \text{ else } 3$$

$$\mathbb{Z}[i]_{(p)} = \mathbb{F}_p[x]/x^2+1, \quad p=5 \quad (3)$$

$$\mathbb{F}_5[x] \cong \mathbb{F}_5[x] \rightarrow \mathbb{F}_5$$

CR7

$$\mathbb{F}_5 \cong \mathbb{F}_5[x]/x^2+1$$

$$P_1, P_2 = \text{ker}(\mathbb{Z}[i]_{(p)} \rightarrow \mathbb{F}_p)$$

$$\Rightarrow P_1 = \langle 5, 1-2i \rangle = \langle 1-2i \rangle$$

$$P_2 = \langle 5, 1+2i \rangle = \langle 1+2i \rangle$$

$$P_1 = P_2 \Rightarrow D(p) = 1, \quad I(p) = 1$$

$$5 = (1+2i)(1-2i) \text{ is not prime}$$

$$p=5, \quad \text{if } p \neq 2, \text{ else } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\bar{x} \in L(p) \text{ if } x \in \mathbb{Z}[i]$$

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = 0 \text{ if } x \in \mathbb{Z}[i]$$

$$f(x) = 0 \text{ if } x \in \mathbb{Z}[i]$$

$$f(x) = 0 \text{ if } x \in \mathbb{Z}[i]$$

$$f(x) = 0 \text{ if } x \in \mathbb{Z}[i]$$

$$f(x) = 0 \text{ if } x \in \mathbb{Z}[i]$$

$$x \in S, \quad \bar{x} \in L(p) \text{ if } x \in \mathbb{Z}[i]$$

$$x \in \mathbb{Z}[i], \quad f(x) = 0 \text{ if } x \in \mathbb{Z}[i]$$

$$f(x) = 0 \text{ if } x \in \mathbb{Z}[i]$$

$$f(x) = 0 \text{ if } x \in \mathbb{Z}[i]$$

$\mu(x, y) \quad \bar{x} \quad RW3 \quad G, p \vdash \bar{L} \rightarrow \bar{f} = \prod (x - \alpha_i) \quad , st1$
 $\cdot \rightarrow \text{def} \quad L(\beta)/K(\beta) \quad p \vdash \quad L(\beta) \rightarrow$

$$\gamma(k) = \frac{L(\beta)}{k(\beta)} \quad (2)$$
$$\gamma(k) = \frac{L(\beta)}{k(\beta)} \quad (2)$$