13/3/19 הרצאה 3

חוגי הערכה בדידה שלמים (Complete DVR)

יהי (K,v) שדה מוערך בבדידות (כלומר, v הערכה בדידה): הה"כ $v: K \twoheadrightarrow \mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ (כלומר ההערכה מנורמלת). יהי $\mathcal{O}_v$ חוג ההערכה, $\mathfrak{p}_v = \pi\mathcal{O}_v$ האידאל המקסימלי, כלומר π הוא מאחד (Uniformizer) - $v(\pi)=1$ מינימלי.

ניקח $(K_v, \hat{v})$ השלמה של K, ונניח ש-$\hat{v}$ מרחיב את v. ברור שחבורת ההערכה של $\hat{v}$ היא הסגור של חבורת ההערכה ולכן גם $\hat{v}$ בדידה (נשים לב ש-v פונקציה רציפה - היא מגדירה הערך המוחלט).

מעכשיו נסמן את $\hat{v}$ ב-v (רק להקל). יש חוג הערכה בדידה,

$$\hat{\mathcal{O}}_v = \{x\in K_v \mid v(x)\geq 0\}$$
$$\hat{\mathfrak{p}}_v = \{x\in K_v \mid v(x)> 0\} = \pi\hat{\mathcal{O}}_v \quad (\text{עדיין מאחד כי } \pi \text{ מרחיבה וחשבנו את ההערכה } v)$$

כמו שאמרנו בע"פ, אם $x_n \to x$ אז $v(x_n)\to v(x)$. ולכן אם $\{x_n\}$ מתכנס (לא לאפס) אז $\{v(x_n)\}$ קבועה המ"מ.

מסקנה: $x\in\hat{\mathcal{O}}_v$ הפיך $\Leftrightarrow$ x הוא גבול של הפיכים.

הוכחה: כן, נובע מיידי מכך שהגבול x הפיך $\Leftrightarrow v(x)=0$. $\square$

טענה: ההעתקה $\mathcal{O}_v \to \hat{\mathcal{O}}_v$ משרה סדרה של העתקות תואמות,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v^n \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "G"] & \hat{\mathcal{O}}_v/\hat{\mathfrak{p}}_v^n \arrow[d] \\
\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v^{n-1} \arrow[r, "\sim"] & \hat{\mathcal{O}}_v/\hat{\mathfrak{p}}_v^{n-1}
\end{tikzcd}$$

ובפרט,

$$\hat{\mathcal{O}}_v = \varprojlim_n \mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v^n$$

הוכחה: ברור ש-

$$\mathfrak{p}_v^n = \{x\in K \mid v(x)\geq n\} = \{x\in \hat{K} \mid v(x)\geq n\} \cap \mathcal{O}_v = \hat{\mathfrak{p}}_v^n \cap \mathcal{O}_v$$

ולכן, ההעתקות האופקיות מוגדרות וחח"ע.

אם ניקח $x\in\hat{\mathcal{O}}_v$, יש $y\in\mathcal{O}_v$ כך ש- $v(x-y)\geq n$. ולכן,

$$x\equiv y \pmod{\hat{\mathfrak{p}}_v^n}$$

ולכן ההעתקות האופקיות על. התאמה גם ברור כי הכל מוגדר טבעי,

ולכן הוכחנו את החלק הראשון.

תזכורת: אם יש מערכת הפוכה של חוגים,

$$\cdots \longrightarrow X_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} X_i \xrightarrow{\varphi_i} X_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \cdots$$

אז ההגדרה של הגבול ההפוך היא האובייקט היחיד שעבור R,

$$\begin{tikzcd} & & R \arrow[dll] \arrow[d, "\psi_{i+1}"'] \arrow[dr, "\psi_i"] \arrow[drr] & & \\ \cdots \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{i+1} \arrow[r] & X_i \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

יש $\psi: R \to \varprojlim X_n$ יחיד כך שכל מה שצריך מתחלף.

בנייה קונקרטית של $\varprojlim X_i$ – $X \subseteq \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ כך ש- $X=\{(x_i)\in \prod_i X_i \mid \forall j.\ \varphi_j(x_j)=x_{j-1}\}$.

במקרה שלנו,

$$\hat{O}_v \xrightarrow{\sim} \varprojlim \hat{O}_v/\hat{P}_v^n \cong \varprojlim O_v/P_v^n$$

היא על, וחח"ע כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{P}_v^n = 0$. לכן כתבנו איזומורפיזם בהפיכה הראשון, והאיזומורפיזם השני בא ממה שהוכחנו בחלק הראשון - כי יש איזומורפיזם וההעתקה בין הקואורדינטות מתחלפת. ☐

המבנה של DVR שלם I: (מאפיין שווה)

בהינתן, O_v חוג הערכה שלם:

v ההערכה המנורמלת

π מחולל

K שדה מנה

$\bar{k} = O_v/\pi O_v$ שדה שארית

[**דוגמה:** $O=\mathbb{C}[[x]]$ - טורי טיילור פורמליים. $\pi = x$, $\bar{k}=\mathbb{C}$.]

נבחר $0\in S \subset K$ מערכת מייצגים ל-$\bar{k}$, כלומר $\underbrace{S \hookrightarrow O \to \bar{k}}_{\text{חח"ע ועל כפונקציה}}$.

טענה: לכל איבר $x\in O$, יש הצגה *יחידה* מהצורה $x=\sum_{n=0}^{\infty} s_n \pi^n$ עם $s_n\in S$, והטור מתכנס. באופן דומה לכל $x\in K$ יש הצגה יחידה $x=\sum_{n\gg-\infty} s_n\pi^n$.

הוכחה: הטענה השנייה נובעת מהראשונה ע"י הכפלה ב- $\pi^{-v(x)}$, עבור $v(x)<0$.

נניח אם כך ש- $x\in O$. נגדיר באינדוקציה את s_n: $s_0 \equiv x \pmod{\pi}$,

$$s_1 = \frac{x-s_0}{\pi} \bmod \pi$$

$$s_2 = \frac{x-s_0-s_1\pi}{\pi^2} \bmod \pi$$

$$\vdots$$

ולכן, $x \equiv s_0 + \pi s_1 + \dots + \pi^n s_n \pmod{\pi^{n+1}}$. לכן, $x = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \pi^n$. □

<u>דוגמה:</u> ניקח $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Q}_p$, וגם $S=\{0,\dots,p-1\}$. $\oplus$ נתון -

$x=\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ וכל $x\in\mathbb{Z}_p$

חיבור "עם ע"ז" - $p = 1 + p-1$ וגם קיים -

$(p-1,0,\_\_)+(1,0,\_\_)=(0,1,\_\_)$

מערכת נציגים "יותר טובה" היא -

$S=\{0\}\cup\mu_{p-1}$ (למה $\mu_{p-1}\subseteq\mathbb{Z}_p$? בתרגיל. נובע מהנזל)

כאשר μ_n = שורשי יחידה מסדר n - מערכת כפלית.

<u>הערה:</u> אם $0\in S$ מערכת נציגים אזי כל טור $\sum s_i\pi^i$ מתכנס.

מה טעם נבקש ש-$S\subseteq\mathcal{O}$ תת חוג ואז נקבל $S\cong\bar{k}$,

אזי:

$$\mathcal{O}\cong\bar{k}[[x]]$$

$$\sum s_n\pi^n \longrightarrow \sum \bar{s}_n x^n$$

והמטרה כי, $\mathrm{char}\,\mathcal{O}=\mathrm{char}\,K$.

ההפך גם נכון -

<u>משפט:</u> יהי $\mathcal{O}$ חוג הערכה בדידה כך ש-$\mathrm{char}\,\bar{k}=\mathrm{char}\,\mathcal{O}$. נניח ש-$\bar{k}$ משוכלל (כלומר אין ל-$\bar{k}$ הרחבות א'-פרדות) אזי - $\mathcal{O}\cong\bar{k}[[x]]$.

בנוסף, חוגים שלמים בהם בגאומטריה אלגברית הם חוגים של טורי טיילור (מה?!) כי החוגים שמופיעים הם חוגי הערכה בדידה...

<u>הערה:</u> ניתן להוריד את הנחת השכלול, אבל זה מעשה כלה.

<u>"הוכחה":</u> די למצוא $S\subseteq\mathcal{O}$ תת שדה.

<u>במקרה ה-</u> יהי $\mathcal{O}$ חוג מקומי שהוא האוסדורף ושלם ביחס לטופולוגיה המושרית מסדרת אידיאלים, $I_1\supseteq I_2\supseteq\dots$ כך ש-$I_{m+n}\supseteq I_nI_m$.

[הבסיס for פתוחים של אפס - $I_1,\dots$. וזה עושה הכלל.]

נניח $\bar{k}=\mathcal{O}/I_1$ שדה ממאפיין אפס. אזי יש $S\subseteq\mathcal{O}$ נציגים שמשדה.

(אפשר לעשות משהו עם טיפה קושי כדי לפתור את זה שלא ברור אם יש מטריקה)

יש:

$$\mathbb{Z}\longrightarrow\mathcal{O}\longrightarrow\bar{k}$$ תח"ע

(כלל שמשמעותו שהמציין של $\bar{k}$ הוא אפס)

והמטרה אם $\mathbb{Z}$ ב-$\mathcal{O}$ הפיכים $\Leftarrow$ $\mathcal{O}$ מכיל שדה.

ניקח את $S\subseteq\mathcal{O}$ להיות שדה מקסימלי. נסמן $\bar{S}\subseteq\bar{k}$. נניח - להגיע

שלילה. אם יש $\bar{x}\in\bar{k}$ שלא ב-$\bar{S}$ אז החלה או עולה מס

2 אז ולכן $S(x)\subseteq\mathcal{O}$ -סגורה טופולוגית. אם נראה שאם $\bar{x}$ אלגברי מעל $\bar{S}$
אז הוא שורש של הפולינום $\bar{f}(x)$ הוא פריק, נראה ש- $\bar{f}$ ו- f
נוכל להשתמש בלמה הקודמת. $\bar{f}$ פריק, מהלמה של הנזל יש $x\in\mathcal{O}$ ששורש
ל- $\bar{x}$ ולכן $S[x]=S(x)=\underbrace{S}_{\text{טופולוגית}}$ ולכן $\bar{S}=\bar{k}$. □

<u>הלמה:</u> (הלמה של הנזל)

יהי $\mathcal{O}$ כמו בהגדרה הקודמת, בלי הדרישה ש-$\operatorname{char}\bar{k}=0$.
ניקח $f\in\mathcal{O}[x]$, כך של-$\bar{f}\in\bar{k}[x]$, הפולינום מודולו I_1,
יש שורש פשוט $\alpha\in\bar{k}$. אז קיים $a\in\mathcal{O}$ יחיד כך ש-$f(a)=0$,
$a\equiv\alpha \pmod{I_1}$.

<u>הוכחה:</u> בונים את הסדרה a_n באינדוקציה. בצעד האינדוקטיבי:

$$f(a_{n+1}) = f(a_n)+hf'(a_n) \pmod{I_{n+1}}$$

כאשר - $a_{n+1}=a_n+h,\ h\in I_n$

מה שצריך זה למצוא h כך ש-

$$f(a_{n+1}) = f(a_n)+hf'(a_n)\equiv 0 \pmod{I_{n+1}}$$

פה נכנס $f'(\alpha)$ הפיך מודולו I_1

ולוקחים - $h=-f(a_n)/f'(a_n)$. (אפשר כי $f'(a_n)\not\equiv 0 \pmod{I_1}$ ($f'(a_n)\equiv f'(\alpha) \pmod{I_1}$)) □

<u>מקרה שני</u> - $0<p=\operatorname{char}\mathcal{O}=\operatorname{char}\bar{k}$

חוג Λ מאופיין p הוא <u>משוכלל</u> אם האנדומורפיזם פרובניוס $x\mapsto x^p$
הוא <u>על</u>. בפרט, לכל $x\in\Lambda$ יש שורש p - כלומר $x^{1/p}\in\Lambda$.

<u>הגדרה המרכזית:</u> יהי $\mathcal{O}$ חוג שלם, האוסף שלו ביחס לסדרה
$I_1\supseteq I_2\supseteq\dots$ עם $I_{n+m}\supseteq I_nI_m$. נניח ש-$\bar{k}=\mathcal{O}/I_1$ - שדה משוכלל
מאופיין $p>0$. ~~[illegible]~~
1) יש בדיוק מערכת נציגים אחת $f:\bar{k}\to\mathcal{O}$ ($S=f(\bar{k})$) שמתחלפת
עם פרובניוס: $f(\alpha^p)=f(\alpha)^p$.
2) $a\in\mathcal{O}$ שייך ל-S $\Leftrightarrow$ יש לו שורש p^n לכל n.
3) מערכת הנציגים היא כפלית - $f(\alpha\beta)=f(\alpha)f(\beta)$, לכל $\alpha,\beta\in\bar{k}$.
4) אם $\operatorname{char}\mathcal{O}=p$ אז S הוא שדה.

<u>הוכחה:</u> ניקח $\alpha\in\bar{k}$. ניקח -

$$L_n=\{a\in\mathcal{O} \mid a\equiv\alpha^{p^{-n}} \bmod I_1\}$$
$$U_n=\{a^{p^n}\mid a\in L_n\}$$

ניקח $U_n\subseteq L_0=\{\alpha \text{ הרמות}\}$, $U_{n+1}\subseteq U_n$. נראה ש-U_n קושי (Cauchy Filter Base)

אבל ניתן להגדיר אנליטיות (...) ∎
באופן שונה, כי יותר מסובך, ולא נעשה את זה בגלל הזמן.

פונקציות טרנסצנדנטיות:

נתבונן בפונקציות-

$$\exp(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$$
$$-\log(1-x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i}$$

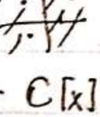
כש-$x\in\mathbb{R}$ או $x\in\mathbb{C}$ מבינים היטב. כש-$x\in K_p$, K שדה מספרים, $\mathbb{F}_p$ בגלל סופי.

<u>תרגיל:</u> נסמן v - ההערכה ה-p-אדית המנורמלת על K_p, $e=v(p)=e(\mathfrak{P}/p)$.
צ"ל, כי לכל $x\in K_p$ עם $v(x)>\frac{e}{p-1}$,
(1) $\exp(x)$ מתכנס, $\exp(x)=1+c$ עם $v(x)=v(c)$.
(2) $-\log(1-x)$ מתכנס, $-\log(1-x)=c'$, עם $v(c')=v(x)$.

הרחבה של שדה שלמים

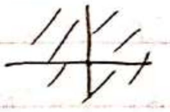
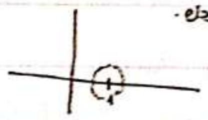
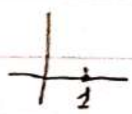
$O_K\subseteq K$ שדה מספרים, $p\in\mathfrak{P}_f(K)$ אידאל ראשוני.
לוקליזציה $\rightsquigarrow O_{K,p}$ עם אידאל יחיד
את L/K הרחבה של שדה מספרים,
$O_K \rightsquigarrow O_{K,p}$ לוקליזציה
ב-$\mathbb{Q}O_{K,p}$ -ישארו כל הראשוניים מעל p, ועם "ישארו הדרגות"
האינדקס f_i ~~...~~ ומעלת הסיעוף e_i

<u>אינטואיציה:</u>



$$\mathbb{C}[x] - \mathbb{C}[x,x^{-1}] - \mathbb{C}[x]_{x-1} - \overset{\text{analytic}}{\mathbb{C}[[x-1]]} - \mathbb{C}[[x-1]]$$

פונקציה רגולרית על $\mathbb{C}$ | פונקציה רגולרית ב-$\mathbb{C}-\{0\}$ | סביבה של 1 | סביבה קטנה של 1 לא ניתן לכסות. | סביבה פתוחה סביב 1

ראשוניים ~ פתוחה גדולה
השלמה ~ סביבה קטנה

לכן ניתן להוכיח דברים יותר טובים בהשלמה (סביבה יותר קטנה)

יהי (K,v) שדה מוערך בבדידות. ותהא L/K הרחבה פרידה סופית.

ניקח - $\mathcal{O}=\mathcal{O}_v$ חוג הערכה

$\mathfrak{p}$ האידאל המקסימלי ב-$\mathcal{O}$

נסמן - $\mathcal{O}_L \supseteq \mathcal{O}$ הסגור השלם של $\mathcal{O}$ ב-L.

ניקח את הפירוק של $\mathfrak{p}$ ב-L:

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \beta_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot\beta_g^{e_g}$$

נסמן ב-w_i את ההערכה ה-β_i-אדית על L. מתקיים ש-

$w_i(x) = e_i\cdot v(x)$ לכל $x\in\mathcal{O}_K$ $\quad(\mathcal{O}_K:=\mathcal{O})$

לכן, $w_1,\dots,w_g$ מרחיבים הערכה שקולה ל-v.

משפט הקירוב החלש נותן ש-$w_1,\dots,w_g$ לא שקולות.

להיפך, אם w הערכה על L שמרחיבה הערכה שקולה ל-v, אז w לא ארכימדית (כי לא ארכימדית $\Leftrightarrow$ $\{n_i\}$ חסומה עבור הצמצום לתוך K כבר, אז היא חסומה). אזי, יש לנו -

$$\{x\in L \mid w(x)>0\} = P_w \subseteq \mathcal{O}_w = \{x\in L \mid w(x)\geq 0\}$$

נחתוך עם K, נקבל $P = P_w\cap K \subseteq \mathcal{O}_w\cap K \underset{\text{מהשקילות}}{=} \mathcal{O}_v$. לכן, P_w ראשוני מעל P.

מכאן, $P_w\cap\mathcal{O}_L=\beta_i$. לכן, w שקולה ל-w_i. לסיכום קיבלנו -

משפט: יהי (K,v) עם v בדידה, וחוג הערכה $\mathcal{O}_v$. תהי L/K פרידה. $\mathcal{O}_L$ - הסגור השלם של $\mathcal{O}_v$ ב-L. אזי, יש התאמה 1-1 בין ההרחבות של v ל-L ובין ראשוניים של $\mathcal{O}_L$ מעל P_v.
(ראשוני מתאים להערכה פ-אדית)

אם $w_1,\dots,w_g$ מתאימות ל-$\beta_1,\dots,\beta_g$ אזי - (מנורמלים - חבורת הערכה היא $\mathbb{Z}$.)

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \beta_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot\beta_g^{e_g}$$

אז לכל i, $e_i\cdot v = w_i|_K$.

מסקנה: יהי K שדה מספרים. אזי, $P_f(K) = \{\text{ראשוניים של } \mathcal{O}_K\}$.