

משפט - החתום בקובץ ואינטגרל

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n \in R[a, b], \quad n \in \mathbb{N}$$
$$: f \in R[a, b] \quad \text{SRL} \quad f_n \xrightarrow{u} f \quad \text{mij}$$

$$a \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

$$[0,1] \rightarrow f_n(x) = x n^d \cdot e^{-nx}$$

1) עבור אינפ. של  $\mathcal{F}_n$  מתקיים?

(2) סגור א'ס 2 מותק המותק בארץ ומוטב

הקצת,  $x \in [0, 1]$  וכן  $f_n(x) \rightarrow 0$  (1)

ט"ו כ"ח      התכנסות      ה"ט :

$$f_n'(x) = h^d (e^{-nx} + x \cdot (-h) \cdot e^{-nx}) \stackrel{?}{=} 0$$

$\hookrightarrow x = \frac{1}{h}$

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(1) = \frac{n^d}{e^n}, \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{d-1}}{e}, \quad x_{\max} = \frac{1}{n}$$

מה צורך עבור אוילו ערד' א מתקיים:

$$|F_n(\frac{1}{h})| \longrightarrow 0$$

221 Nink m m 2/1

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot e^{-nx} dx &= nx \int_0^1 x \cdot \left(\frac{e^{-nx}}{-n}\right)' dx = \\ &= nx \left[ \left(x \cdot \frac{e^{-nx}}{-n}\right)' + \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-nx} dx \right] = \\ &= nx \left[ -\frac{1}{n} e^{-nx} + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{e^{-nx}}{-n}\right)' \right] = nx \left[ -\frac{1}{n} e^{-nx} + \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{n} e^{-nx} \right] \right] \end{aligned}$$

התנאי המשפט הוא "מספיק" אולם  
וצריך ליתן זה תנאי הן המצא  
לשון מתקיים

אז בקרן, התיכנסות במ"ט שנה תנאי מספיק.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , x \in [0, n] \\ 0 & \text{m.c.k.} \end{cases}$$

משפט המצ' ורנר:  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ונגיד שכן  $f_n$  היא פונקציה רציפה וחסומה

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ונניח  $f_n \xrightarrow{f} f$  בהטת קטע קומפקט (חט"ק)  $(a, b)$   
 אזי  $f_n \rightarrow f$  בהטת קטע קומפקט  $(a, b)$  -  $\Psi$

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx$

תהי  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה וחסומה.

$$\lim_{h \rightarrow \infty} h \int_0^\infty e^{-hx} f(x) dx = f(0)$$

נניח  $|e^{-hx} f(x)| \leq K e^{-hx}$  כי  $|f| \leq K$  (פיתרון נסמן)

האינטגרל של  $e^{-hx} f(x)$  מתכנס בהחלט וזמן מתכנס

$$\int_0^\infty e^{-hx} f(x) dx = \int_0^\infty e^{-y} f(y/h) \frac{dy}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} h \int_0^\infty e^{-hx} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-y} f(y/h) dy = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^\infty e^{-y} f(yt) dy$$

נניח  $f_n(y) = e^{-y} f(yt)$  תהי  $0 < t_n \rightarrow 0$  (ציר)

$g(y) = e^{-y} \cdot f(0)$   $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

~~$|f_n(y) - g(y)| \leq |f(yt_n) - f(0)|$~~

~~כי  $|f| \leq K$~~

$$\sup_{y \in [0, b]} |f_n(y) - g(y)| \leq \sup_{y \in [0, b]} |f(yt_n) - f(0)| \rightarrow 0$$

יהי  $\epsilon > 0$

$f_n \xrightarrow{u} g$  דבר

יהי  $\delta > 0$ , נמצא  $n$  כך ש-  $0 < t_n y < \delta$   $\forall y \in [0, b]$

$$|f_n(y)| = e^{-y} |f(yt_n)| \leq \frac{K \cdot e^{-y}}{y}$$

$$\int_0^\infty e^{-y} f(yt_n) dy \rightarrow \int_0^\infty e^{-y} f(0) dy = f(0)$$

משפט המצטבר:

משפט - המילר-וילסון (צריך)

תהי  $f_n, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש-  $f_n \in C^1[a, b]$  ו-  $f_n(x_0) = f(x_0)$  מתכנס  
 ו-  $f_n'(x) \rightarrow g(x)$  כך ש-  $g \in C[a, b]$  ו-  $f'(x_0) = g(x_0)$

אז: קיימת פונקציה  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש-  $f' = g$  ו-  $f_n \xrightarrow{u} f$  ה-  $[a, b]$

דוגמה -  $f_n(x) = \frac{\arctan(x^n)}{n}$  קוביחו מתכנסת במהרה ה-  $[0, \infty)$

אפשר לראות ש-  $f_n' = \frac{1}{n} \cdot \frac{n x^{n-1}}{1+x^{2n}} = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$  ה-  $f'$

$$f_n \xrightarrow{u} 0 \quad \leftarrow \quad |f_n(x)| \leq \frac{\pi}{n} \rightarrow 0$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0, \quad f_n'(x) = \frac{1}{n(1+x^{2n})} \cdot n x^{n-1}$$