

מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

© ארזים

28 בנובמבר 2016

1 בסיסים

1.1 יציבות של בסיסים אורתוגונליים

למה 1.1 יהי X מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $L, M \subseteq X$ תתי מרחב. אם $\dim L < \dim M < \infty$, אזי

$$L^\perp \cap M \neq \{0\}$$

הוכחה: נבחר בסיס אורתונורמלי $\{x_1, \dots, x_n\}$ של L , ונבחר $\{y_1, \dots, y_{n+1}\} \subseteq M$ בלתי תלויים לינארית. נראה שקיים $y \in \text{span}\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ כך שמתקיים $y \perp x_j$ לכל $1 \leq j \leq n$.

בניסוח מחדש, מחפשים β_i שלא כולם 0, כך שלכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \langle y_i, x_j \rangle = 0$$

זו מערכת של n משוואות לינאריות הומוגניות עם $n+1$ נעלמים, ולכן בהכרח יש לה פיתרון לא טריוויאלי. ■

משפט 1.2 יהי H מרחב הילברט ויהי $\{\varphi_n\}$ בסיס אורתונורמלי במרחב H . תהי $\{\psi_n\}$ מערכת אורתונורמלית כלשהי. אם הסכום

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n - \psi_n\|^2 < \infty$$

אזי $\{\psi_n\}$ בסיס.

הוכחה: נניח בשלילה כי $\{\psi_n\}$ לא בסיס, כלומר

$$(\text{span}\{\psi_n\})^\perp \neq \{0\}$$

נסמן $\psi_0 \in (\text{span}\{\psi_n\})^\perp$ עם $\|\psi_0\| = 1$, נבחר N גדול מספיק כך שמתקיים

$$\sum_{n>N} \|\varphi_n - \psi_n\|^2 < 1$$

מהלמה, קיים $w \in (\text{span}\{\psi_0, \dots, \psi_N\})$ עם $\|w\| = 1$, כך שמתקיים $w \perp \varphi_j$ לכל $1 \leq j \leq N$ (הראשון זה מרחב ממימד $N+1$, השני ממימד N). כעת מתקיים

$$\begin{aligned} 1 &= \|w\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle w, \varphi_n \rangle|^2 = \sum_{n>N} |\langle w, \varphi_n \rangle|^2 = \\ &= \sum_{n>N} |\langle w, \varphi_n - \psi_n \rangle|^2 \leq \|w\|^2 \sum_{n>N} \|\varphi_n - \psi_n\| < 1 \end{aligned}$$

■

בסתירה.

2 מרחב L^2

משפט 2.1 $(L^2([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, כאשר

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot \bar{g}$$

הינו מרחב ההשלמה של $(C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, כלומר $L^2([a, b])$ הוא מרחב הילברט, ובו $C([a, b])$ תת קבוצה צפופה.

טענה 2.2 יהיו $\{\phi_i\}, \{\varphi_j\}$ בסיסים אורתונורמליים של פונקציות רציפות במרחב $L^2([a, b])$. נגדיר

$$\psi_{ij}(t, s) = \varphi_j(t) \psi_i(s)$$

אזי $\{\psi_{ij}\}$ בסיס אורתונורמלי של $L^2([a, b]^2)$.

הוכחה: ניזכר כי בהינתן מערכת אורתונורמלית, היא בסיס אם ורק אם שוויון פרסבל נכון לגביה לכל ווקטור במרחב. מספיק להראות זאת על קבוצה צפופה, למעשה.

$\{\psi_{ij}\}$ מערכת אורתונורמלית, לכן מספיק להוכיח שכל פונקציה רציפה $f \in C([a, b]^2)$ מתקיים

$$\|f\|^2 = \sum_{i,j} |\langle f, \psi_{ij} \rangle|^2$$

נקבע i , ואז נכתוב

$$a_i(t) = \int_a^b f(t, s) \bar{\phi}_i(s) ds$$

f רציפה ולכן a_i רציפה כפונקציה של t . כעת מתקיים

$$\sum_i |a_i(t)|^2 = \int_a^b |f(t, s)|^2 ds$$

מזהות פרסבל. כעת, נגדיר

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \langle f, \psi_{ij} \rangle = \int_a^b \int_a^b f(t, s) \overline{\varphi_j(t) \phi_i(s)} ds dt = \\ &= \int_a^b \overline{\varphi_j(t)} \int_a^b f(t, s) \overline{\phi_i(s)} ds dt = \int_a^b a_i(t) \overline{\varphi_j(t)} dt \end{aligned}$$

כעת שוב מזהות פרסבל

$$\sum_j |a_{ij}|^2 = \sum_j |\langle a_i, \varphi_j \rangle|^2 = \|a_i\|^2$$

ולכן

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 &= \sum_i \|a_i\|^2 = \sum_i \int_a^b |a_i(t)|^2 dt = \int_a^b \sum_i |a_i(t)|^2 dt = \\ &= \int_a^b \int_a^b |f(t, s)|^2 ds dt \end{aligned}$$

■ וקיבלנו את זהות פרסבל לכל פונקציה רציפה. לכן $\{\psi_{i,j}\}$ אכן בסיס.

2.3 מסקנה $\{e^{int+ims}\}$ בסיס אורתונורמלי של $L^2([- \pi, \pi]^2)$.

3 הטלה על קבוצות קמורות

3.1 הגדרה K קמורה אם לכל $x, y \in K$ ולכל $\lambda \in [0, 1]$ מתקיים $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.

בהנתן מרחב מכפלה פנימית X , נקודה $x \in X$, $K \subseteq X$ תת קבוצה, ניתן להגדיר

$$d(x, K) = \inf_{y \in K} \|x - y\|$$

אם K סגורה וקמורה אזי קיים יחיד $y \in K$ כך שמתקיים $\|y - x\| = d(x, K)$.

סימון נסמן

$$P_K x = y$$

טענה 3.2 יהי H מרחב הילברט. תהי $K \subseteq H$ קבוצה קמורה וסגורה, ויהי $x \in H, z \in K$. אזי $P_K x = z$ אם ורק אם $\operatorname{Re}(\langle x - z, y - z \rangle) \leq 0$ לכל $y \in K$.

הוכחה: אנחנו נוכיח שאם z הוא ההטלה אז הזהות מתקיימת. הכיוון השני - בתרגיל בית. יהי $y \in K$, נגדיר עבור $\lambda \in [0, 1]$ את

$$y_\lambda = \lambda y + (1 - \lambda) z \in K$$

כעת,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \|x - z\|^2 - \|y_\lambda - x\|^2 = \|x - z\|^2 - \|y_\lambda - z + z - x\|^2 = \\ &= \|x - z\|^2 - \left(\|y_\lambda - z\|^2 + \|z - x\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle y_\lambda - z, z - x \rangle \right) = \\ &= -\lambda^2 \|y - z\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re} \langle y - z, z - x \rangle \end{aligned}$$

בסך הכל

$$\lambda \|y - z\|^2 \geq 2\lambda \operatorname{Re} \langle y - z, x - z \rangle$$

ובפרט

$$\operatorname{Re} \langle y - z, x - z \rangle \leq 0$$

■

טענה 3.3 יהי H מרחב הילברט, ותהי $K \subseteq H$ תת קבוצה קמורה וסגורה. אזי לכל $x, y \in H$ מתקיים:

1.

$$\operatorname{Re} \langle P_K x - P_K y, x - y \rangle \geq \|P_K x - P_K y\|^2$$

2.

$$\|x - y\| \geq \|P_K x - P_K y\|$$

הוכחה:

1. מהטענה הקודמת, לכל $w \in H, z \in K$, מתקיים

$$\operatorname{Re} \langle w - P_K w, z - P_K w \rangle \leq 0$$

נציב $w = x, z = P_K y$ וכן $w = y, z = P_K x$ ונקבל

$$\operatorname{Re} \langle x - P_K x, P_K y - P_K x \rangle \leq 0$$

$$\operatorname{Re} \langle y - P_K y, P_K x - P_K y \rangle \leq 0$$

נבחר ונקבל

$$\operatorname{Re} (\langle x - P_K x, P_K y - P_K x \rangle - \langle y - P_K y, P_K y - P_K x \rangle) \leq 0$$

$$\operatorname{Re} (\langle x - y, P_K y - P_K x \rangle) + \|P_K y - P_K x\|^2 \leq 0$$

וסיימנו.

2. נחשב:

$$\|x - y\| \|P_K x - P_K y\| \geq |\langle x - y, P_K x - P_K y \rangle| \geq \operatorname{Re} \langle x - y, P_K x - P_K y \rangle \geq \|P_K x - P_K y\|^2$$

ולכן סיימנו.

■