

מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

© ארזים

21 בנובמבר 2016

תרגיל

$$\lambda_n := \min_{a \in \mathbb{C}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sqrt{|\cos x|} - a \cos(nx) \right|^2 dx$$

חשבו

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$$

פתרון נתבונן בפונקציה

$$f(x) \in \sqrt{|\cos x|} \in R(\mathbb{T})$$

נסמן גם

$$W_n = \text{span}(\cos(nx))$$

ונסמן בתור P_n את ההטלה האורתוגונלית על W_n .

$$\lambda_n = \min_{a \in \mathbb{C}} \left(\|f(x) - a \cos(nx)\|^2 \right) = \|f(x) - P_n(f)\|^2$$

מתקיים כמובן

$$P_n(f) = \frac{\langle f, \cos(nx) \rangle}{\|\cos(nx)\|^2} \cos(nx)$$

משפט פיתגורס נובע:

$$\lambda_n = \|f - P_n f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_n f\|^2 = 4 - \|P_n f\|^2$$

קל לבדוק כי $\|f\|^2 = 4$. כמו כן נזכר כי $\{\cos nx\}_{n=1}^\infty$ היא מערכת אורתוגונלית, וכן $\|\cos nx\|^2 = \pi$. לכן

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 4 - \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle f, \cos nx \rangle|^2 = 4$$

הגבול האחרון שווה 0 בגלל הלמה של רימן ולבג.

הגדרה 0.1 מרחב הילברט היא מרחב מכלה פנימית שלם (כל סדרת קושי מתכנסת).

תרגיל יהי H מרחב הילברט, ויהי $E \subseteq H$ תת מרחב. הוכיחו כי

$$E^{\perp\perp} = \overline{E}$$

פתרון יהי $x \in \overline{E}$, ויהי $y \in E^\perp$. תהי $\{x_n\} \subseteq E$ כך שמתקיים $x_n \rightarrow x$. מרציפות המכפלה הפנימית נובע כי

$$0 = \langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$$

ולכן $x \perp y$. קיבלנו כי $\overline{E} \subseteq E^{\perp\perp}$. כעת יהי $x \in E^{\perp\perp}$. מתכונות של הטלה אורתוגונלית קיימים ויחידים $y \in \overline{E}$, $z \in E^\perp$ כך שמתקיים $x = y + z$. כעת מהחלק הראשון מתקיים $y \in E^{\perp\perp}$, ולכן $y \in E^{\perp\perp}$. בסך הכל $z \in E^\perp \cap E^{\perp\perp}$, ולכן $z = 0$ - כלומר $x \in \overline{E}$. הוכחנו את ההכלה השנייה, וקיבלנו את השוויון הדרוש.

תרגיל יהי L, M תתי מרחבים של מרחב הילברט H . הוכיחו כי

$$(L + M)^\perp = L^\perp \cap M^\perp$$

פתרון אם $A \subseteq B$ מתקיים $B^\perp \subseteq A^\perp$. כמובן, $L, M \subseteq L + M$, ולכן

$$(L + M)^\perp \subseteq L^\perp \cap M^\perp$$

כעת, יהי $x \in L^\perp \cap M^\perp$. יהי $y \in L + M$. נכתוב $y = y_l + y_m$, כאשר $y_l \in L$, $y_m \in M$. כעת מתקיים

$$x \perp y_l, y_m \Rightarrow x \perp y$$

ולכן סיימנו.

תרגיל יהיו L, M תתי מרחבים סגורים של מרחב הילברט H . הוכיחו כי:

$$(L \cap M)^\perp = \overline{L^\perp + M^\perp}$$

פתרון מהתרגילים הקודמים

$$\begin{aligned}(L^\perp + M^\perp)^\perp &= L^{\perp\perp} \cap M^{\perp\perp} = \overline{L} \cap \overline{M} = L \cap M \\ \overline{(L^\perp + M^\perp)} &= (L \cap M)^\perp\end{aligned}$$

הגדרה 0.2 יהי H מרחב הילברט. מערכת $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ נקראת שלמה אם $H = \overline{\text{span}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}}$.

דוגמאות

1. המערכת $\{t^n\}_{n=0}^\infty$ שלמה במרחב $C([0, 1])$, כפי שראינו בחדו"א 2.
2. $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}_{n=1}^\infty$ שתיהן שלמות במרחב $L^2([-\pi, \pi]) = R(\mathbb{T})$.

תרגיל מצאו את

$$\overline{\text{span}\{e_n\}} \subseteq l^2$$

כאשר

$$\begin{aligned}e_1 &= (1, 2, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, 2, 0, \dots) \\ &\vdots\end{aligned}$$

פתרון יהי $x \in l^2$ כך שמתקיים $x \perp e_n$ לכל n .

$$\begin{aligned}x \perp e_1 &\Rightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \\ x \perp e_2 &\Rightarrow x_2 + 2x_3 = 0 \\ &\vdots \\ x \perp e_n &\Rightarrow x_n + 2x_{n+1} = 0 \\ &\vdots\end{aligned}$$

כלומר, מתקיים

$$x = \alpha \cdot \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \in l^2$$

לכן

$$\overline{\text{span}\{e_n\}} = \left(\text{span} \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \right)^\perp$$

בפרט המערכת אינה שלמה.

תרגיל נגדיר

$$\begin{aligned} L &= \text{span} \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \\ M &= \text{span} \{(1, 0, \dots)\} \end{aligned}$$

בסימוני הסעיף הקודם. הראו כי $L + M$ צפוף במרחב l^2 .

פתרון נראה כי

$$\overline{L + M} = l^2 \iff (L + M)^\perp = \{0\}$$

אבל מתקיים

$$(L + M)^\perp = L^\perp \cap M^\perp$$

יהי $x \in L^\perp$, אזי $x_n = \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. אם $x \in M^\perp$, אזי $x_1 = 0$, אבל $x_1 = -\frac{\alpha}{2}$, ולכן $x_n = 0$ לכל n .

תרגיל הוכיחו כי $\{1, t^3, t^6, \dots\} \subset C([0, 1])$ מערכת שלמה במרחב $C([0, 1])$.

פתרון תהי $f \in C([0, 1])$. יהי $\varepsilon > 0$. נגדיר $g(x) = f\left(x^{\frac{1}{3}}\right) \in C([0, 1])$. כעת, המערכת $\{t^n\}_{n \geq 0}$ שלמה בתוך $C([0, 1])$, ולכן קיים פולינום $q(x) = \sum a_i x^i$ כך שמתקיים

$$\|g - q\|_\infty < \varepsilon$$

נגדיר $p(x) = q(x^3) = \sum a_i x^{3i}$, ומתקיים בקלות

$$\|g - q\| = \|f - p\| < \varepsilon$$

תרגיל הוכיחו כי $\{\sin(nx)\}_{n=1}^\infty$ שלמה במרחב $R([0, \pi])$.

פתרון המערכת $\{\sin(nx)\}_{n=1}^\infty$ היא אורתוגונלית במרחב. תהי $f \in R([0, \pi])$ כך שמתקיים

$$\langle f, \sin(nx) \rangle = \int_0^\pi f(x) \sin(nx) \, dx = 0$$

ונראה כי $f = 0$. נסתכל על $\tilde{f}$, שהיא ההמשכה האי־זוגית של f לקטע $[-\pi, \pi]$. אזי $\tilde{f} \in R(\mathbb{T})$, אבל בגלל שהיא אי־זוגית מקבלים $\langle \tilde{f}, \cos nx \rangle = 0$ לכל n . כמו כן,

$$\tilde{f}(x) \sin(nx)$$

היא פונקציה זוגית בקטע $[-\pi, \pi]$, כלומר

$$\langle \tilde{f}, \sin(nx) \rangle = 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) = 0$$

מבחירת f . לכן בהכרח מתקבל כי $\tilde{f} = 0$ (אורתוגונלי למערכת שלמה), ולכן $f = 0$.