

## מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

© ארזים

14 בנובמבר 2016

**הגדרה 0.1** יהי  $X$  מרחב נורמי.  $x \in X$  תיקרא נקודה קיצונית (נקודת קיצון) של כדור היחידה  $B(X)$  אם לכל  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $a, b \in B(x)$  עבורם מתקיים  $\lambda a + (1 - \lambda)b = x$  מתקיים בהכרח  $a = b = x$ .

**תרגיל** הוכיחו כי  $l_1$  לא איזומטרי למרחב  $C([0, 1])$ .

**הוכחה:** ניקח את  $e_n$  להיות הסדרה הקבועה 0 שבמקום  $n$  יש לה 1. ברור כי  $e_n \in B(l_1)$ , נראה כי הן נקודות קיצון. נניח כי  $\lambda x + (1 - \lambda)y = e_n$  עבור  $\|x\|, \|y\| \leq 1$ . כלומר מתקיים  $1 = \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n$ . ידוע לנו כי  $\sum |x_n|, \sum |y_n| \leq 1$ , ולכן נקבל כי  $|x_n| = |y_n| = 1$  ובסך הכל  $|x_n| = |y_n| = 1$ . בכל  $j \neq n$ , מתקיים  $0 = \lambda x_j + (1 - \lambda)y_j$ , ולכן נקבל בסך הכל  $x = y = e_n$ . לעומת זאת, במרחב  $C([0, 1])$  יש רק שתי נקודות קיצון:  $f \equiv \pm 1$  (קל לבדוק, תרגיל בחדו"א 1). איזומטריה תעביר באופן ברור נקודות קיצון לנקודות קיצון, וזה לא אפשרי כאן. ■

**תרגיל** הראו כי  $C_0^* \cong l_1$ .

**פתרון** יהי  $b \in l_1$ . נגדיר פונקציונאל על  $C_0$  על ידי:

$$f(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

עבור  $a \in C_0$ , מתקיים  $\|a\|_{\infty} = 1$ . כעת,

$$|f(a)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| |b_i| \leq \|a\|_{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| = \|b\|_{l_1}$$

לכן מתקיים

$$\|f\|_{op} \leq \|b\|_{l_1}$$

בשביל החסם בכיוון השני, נגדיר

$$y_n = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$$

ונבחר את  $a_j$  באופן הבא:

$$a_j = e^{-i \arg(b_j)}$$

אז מתקיים  $|a_j| = 1$  לכל  $j$ , ולכן  $\|y_n\|_\infty = 1$ . כעת,

$$f(y_n) = \sum_{j=1}^n a_j b_j = \sum_{j=1}^n |b_j|$$

לכן מתקיים

$$\|f\|_{op} \geq \sum_{j=1}^n |b_j|$$

וזאת לכל  $n$ . לכן למעשה מתקיים

$$\|f\|_{op} \geq \|b\|_{l_1}$$

זה נותן לנו איזומטריה בכיוון אחד. נגדיר גם העתקה בכיוון השני: בהינתן  $f \in C_0^*$  נגדיר

$$b_j = f(e_j)$$

כעת נשתמש באותו  $y_n$  שהגדרנו קודם, ונחשב

$$\|f\|_{op} \geq |f(y_n)| = \sum_{j=1}^n |b_j|$$

וזאת לכל  $n$ , ולכן

$$b \in l_1, \|b\|_{l_1} \leq \|f\|_{op}$$

בכיוון ההפוך, חוזרים על מה שכבר עשינו.

## 0.1 מכפלה פנימית

**הגדרה 0.2** יהי  $X$  מרחב לינארי. פונקציה  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  נקראת מכפלה פנימית אם:

$$1. \text{ לכל } x \in X, \langle x, x \rangle \geq 0, \text{ וכן } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

2. לינאריות במשתנה הראשון:

$$\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$$

3. הרמיטיות:

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

**הערה 0.3** כל מכפלה פנימית משרה נורמה על ידי  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . לא כל נורמה היא מושרית ממכפלה פנימית - תנאי שקול לזה שכן הוא שוויון המקבילית (בתרגיל בית).

**דוגמא** ניקח  $g \in C([a, b])$  חיובית. נגדיר

$$\langle f, h \rangle = \int_a^b f(x) \cdot \overline{h(x)} g(x) dx$$

זה מגדיר פרה מכפלה פנימית על  $R([a, b])$ , ומכפלה פנימית על  $C([a, b])$ .

**משפט 0.4** (אי שוויון קושי שוורץ) יהי  $X$  מרחב מכפלה פנימית,  $x, y \in X$ , אזי

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

**תרגיל** הוכיחו את אי שוויון קושי שוורץ כמסקנה מאי שוויון בסל.

**טענה 0.5** מכפלה פנימית היא פונקציה רציפה בשני המשתנים.

**הוכחה:** יהיו  $u, w \in X$ . ניקח סדרה  $\{u_n\} \subseteq X$  עבורה  $u_n \rightarrow u$  (בנורמה). כעת, מתקיים

$$\begin{aligned} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, w \rangle - \langle u, w \rangle \right| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n - u, w \rangle \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle u_n - u, w \rangle| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| \|w\| = 0 \end{aligned}$$

■

בקואורדינטה השנייה - באותה צורה.

**תרגיל** יהי  $X$  מרחב מכפלה פנימית, ויהי  $E \subseteq X$  תת מרחב. הראו כי  $E^\perp = \{y \in X \mid \forall x \in E \langle x, y \rangle = 0\}$  הוא תת מרחב סגור.

**פתרון** תהי  $\{u_n\} \subseteq E^\perp$  סדרה מתכנסת. נסמן

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

כעת, יהי  $w \in E$ , נקבל

$$\langle w, u \rangle = \left\langle w, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle w, u_n \rangle = 0$$

**הגדרה 0.6** יהי  $X$  מרחב נורמי,  $L \subseteq X$ . נגדיר

$$\text{dist}(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\|$$

מקרה פרטי:  $X$  מרחב מכפלה פנימית. עבור  $x \in X, y \in L$  אם  $x - y \perp L$ , אזי

$$\text{dist}(x, L) = \|x - y\|$$

**תרגיל** יהי  $X$  מרחב נורמי,  $L \subseteq X$  תת מרחב ממימד סופי. הוכיחו כי לכל  $x \in X$  יש קירוב טוב ביותר בתוך  $L$ , כלומר ווקטור  $y \in L$  עבורו  $\|x - y\| = \text{dist}(x, L)$ .

**פתרון** תהי  $\{y_n\} \subseteq L$  סדרה כך שמתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \text{dist}(x, L)$$

אזי  $y_n$  סדרה חסומה במרחב סוף מימדי, ולכן קיימת לה תת סדרה מתכנסת  $y_{n_k} \rightarrow y_0$  כעת

$$\|x - y_0\| = \left\| x - \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \right\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - y_{n_k}\| = \text{dist}(x, L)$$

**משפט 0.7** יהי  $X$  מרחב מכפלה פנימית, ותהי  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  מערכת אורתונורמלית. נסמן  $L = \text{span}\{e_n\}_{n=1}^\infty$  אזי הטענות הבאות שקולות:

$$1. x \in \overline{L}$$

$$2. x = \sum \langle x, e_n \rangle e_n$$

$$3. \|x\|^2 = \sum |\langle x, e_n \rangle|^2$$

**הערה 0.8** (אי שוויון בסל) תחת התנאים של המשפט,

$$\|x\|^2 \geq \sum |\langle x, e_n \rangle|^2$$

**למה 0.9** (הלמה של רימן לבג)

$$\langle x, e_n \rangle \rightarrow 0$$

לכל  $x \in X$