

מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

© ארזים

7 בנובמבר 2016

1 חצי נורמה

הגדרה 1.1 יהי X מרחב לינארי מעל שדה $\mathbb{F}$. p נקראת חצי נורמה (סמי נורמה) אם $p : X \rightarrow \{a \geq 0\}$ ומקיימת

$$1. \quad p(0) = 0$$

$$2. \quad \forall x \in X \forall a \in \mathbb{F} \quad p(ax) = |a| p(x)$$

$$3. \quad \forall x, y \in X \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

הערה 1.2 נסמן $X_0 = \ker p = \{x \in X \mid p(x) = 0\}$, וברור שזהו תת מרחב.

טענה 1.3 יהי $x \in X$. אזי $p(x+y)$ לא תלוי בבחירה של $y \in X_0$.

הוכחה: יהיו $y_1, y_2 \in X_0$. אזי

$$p(x+y_1) \leq p(x+y_2) + p(y_1-y_2) = p(x+y_2)$$

■

אותו טיעון עובד בכיוון ההפוך (y_1, y_2) סימטריים).

מסקנה 1.4 p מגדירה נורמה על X/X_0 .

דוגמא נגדיר

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \, dx$$

לכל f כך שהפונקציה $|f|$ אינטגרבילית רימן בקטע $[0, 1]$.

2 כדור היחידה

יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי.

הגדרה 2.1 נגדיר את כדור היחידה של X להיות

$$B(X) = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

תכונות

1. סימטריה: $x \in B(X) \Rightarrow -x \in B(X)$
2. קמירות: לכל $x, y \in B(X)$ ולכל $\lambda \in [0, 1]$, מתקיים $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq 1$
3. $0 \in B(X)$
4. $B(X)$ קבוצה חסומה.

סימונים

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \\ \lambda A &= \{\lambda a \mid a \in A\} \end{aligned}$$

הגדרה 2.2 בהינתן $K \subseteq X$ המקיימת את תכונות 1, 2, 3 של כדור היחידה, נגדיר את פונקציונאל מינקובסקי:

$$\|x\|_K = \inf \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda K\}$$

טענה 2.3 $\|\cdot\|_K$ היא חצי נורמה.

הוכחה: $0 \in K$, ולכן $\|0\|_K = 0$. כמו כן,

$$\begin{aligned} \|ax\|_K &= \inf \{\lambda > 0 \mid ax \in \lambda K\} = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid x \in \frac{\lambda}{|a|} K \right\} = \\ &= \inf \{|a| \cdot \lambda > 0 \mid x \in \lambda K\} = |a| \cdot \|x\|_K \end{aligned}$$

כאשר ניצלנו כאן את הסימטריה של K . כעת, עבור $x, y \in X$, יהיו $\alpha, \beta > 0$ כך שמתקיים $x \in \alpha K, y \in \beta K$. לכן $x + y \in \alpha K + \beta K$, וכעת

$$\alpha K + \beta K = (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} K + \frac{\beta}{\alpha + \beta} K \right) \subseteq (\alpha + \beta) K$$

כאן השתמשנו בקמירות. אינפמום נשמר באי שוויון, ולכן נקבל את אי שוויון המשולש:

$$\|x\|_K + \|y\|_K \geq \|x + y\|_K$$

■

הערה 2.4 אם K מקיימת גם את תכונה 4, אזי $\|\cdot\|_K$.

דוגמא כאשר K לא חסומה, למשל מישור בתוך $\mathbb{R}^3$, נקבל $\|x\|_K = 0$ לכל $x \in K$.

3 עוצמות של נורמות

הגדרה 3.1 יהי X מרחב לינארי ועליו מוגדרות 2 נורמות φ, ψ . נאמר שהנורמה φ חזקה מהנורמה ψ אם התכנסות לפי φ גוררת התכנסות לפי ψ . באופן שקול, אם קיים קבוע $c > 0$ עבורו לכל $x \in X$ מתקיים

$$\psi(x) \leq c \cdot \varphi(x)$$

תרגיל יהי $1 \leq q < p$. הוכיחו כי $\|\cdot\|_q$ חזקה יותר מאשר $\|\cdot\|_p$.

פתרון תהי סדרה כך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty$$

כעת נראה כי גם

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

בהכרח, קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|x_n|^q < 1$, כלומר $|x_n| < 1$. כעת,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^N |x_n|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p \leq \sum_{n=1}^N |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty$$

מסקנה 3.2 עבור $1 \leq q < p$, מתקיים $l_q \subseteq l_p$.

הגדרה 3.3 יהיו X, Y מרחבים נורמיים, ויהי $T : X \rightarrow Y$ אופרטור לינארי. נגדיר את הנורמה האופרטורית שלו:

$$\|T\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf \{c > 0 \mid \forall x \in X \quad \|Tx\| \leq c \cdot \|x\|\}$$

סימון $\mathcal{L}(X, Y)$ - אופרטורים לינאריים חסומים מהמרחב X אל המרחב Y . כמו כן, $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$.

מסקנה 3.4 עבור $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ מתקיים לכל $x \in X$

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$$

תרגיל יהיו $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ אזי

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$$

פתרון

$$\|ST\| = \sup_{\|x\|=1} \|S(Tx)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|S\| \|Tx\| = \|S\| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|S\| \|T\|$$