

מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

© ארזים

31 באוקטובר 2016

1 מרחבים וקטוריים לינאריים

לרוב נדון במרחבים מעל השדות $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ (ולמעשה לרוב מעל $\mathbb{C}$). מרחב ווקטורי הוא אוסף של אובייקטים עם פעולת חיבור וכפל בסקלר מהשדה. דוגמאות: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, P_n[x], C[0, 1]$.

1.1 העתקות לינאריות

הגדרה 1.1 בהינתן שני מרחבים לינאריים E_1, E_2 מעל אותו שדה, העתקה $A : E_1 \rightarrow E_2$ נקראת לינארית אם לכל שני סקלרים a, b ולכל $x, y \in E_1$ מתקיים

$$A(ax + by) = aA(x) + bA(y)$$

הגרעין:

$$\ker A = \{x \in E_1 \mid Ax = 0\} \subseteq E_1$$

התמונה:

$$\operatorname{Im} A = \{Ax \mid x \in E_1\} \subseteq E_2$$

אם $\operatorname{Im} A = E_2$ וגם $\ker A = \{0\}$ (כלומר A חד־חד־ערכית ועל) נקראת איזומורפיזם (A הפיכה).

1.2 תתי מרחבים

$E_1 \subseteq E_2$ כך שגם E_1 מרחב לינארי אומר שהמרחב E_1 הוא תת מרחב של E_2 . העתקת שיכון (הומומורפיזם): העתקה ששומרת על מבנה. למשל:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\hookrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a, b) &\rightarrow (a, b, 0) \end{aligned}$$

דוגמאות:

1.

$$S_0 = \{\{a_n\}_{n=1}^\infty \mid \exists N. \forall n \geq N \ a_n = 0\}$$

2.

$$C_0 = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^\infty \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\}$$

3.

$$C = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^\infty \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right\}$$

4.

$$l_\infty = \{\{a_n\}_{n=1}^\infty \mid \exists M. \forall n \ |a_n| \leq M\}$$

5.

$$S = \{\{a_n\}_{n=1}^\infty\}$$

יש כאן שיכונים:

$$S_0 \hookrightarrow C_0 \hookrightarrow C \hookrightarrow l_\infty \hookrightarrow S$$

הגדרה 1.2 ווקטורים $x_1, \dots, x_n \in X$ נקראים בלתי תלויים לינארית אם

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \iff \forall i \ a_i = 0$$

אחרת נאמר שהם תלויים לינארית. עבור קבוצות אינסופיות, $\{x_1, x_2, \dots\}$ בלתי תלויים לינארית אם לכל N , $\{x_i\}_{i=1}^N$ בלתי תלויים לינארית.

משפט 1.3 אם $x_1, \dots, x_n$ קבוצה בלתי תלוייה מקסימלית בתוך X , אזי $\{x_1, \dots, x_n\}$ בסיס של X , והמספר n אינו תלוי בבחירת ווקטורי הבסיס. במקרה זה נסמן את המימד של X : $\dim X = n$.

הערה 1.4 אם קיימת קבוצה אינסופית של ווקטורים בלתי תלויים לינארית, נסמן $\dim X = \infty$.

1.3 מרחבי מנה

הגדרה 1.5 יהי X מרחב לינארי, ויהי X' תת מרחב. נגדיר את המנה:

$$X/X' = \{x + X' \mid x \in X\}$$

נסמן $x + X' = [x]$ - מחלקת השקילות של הווקטור x . $y \in [x]$ אם ורק אם $x - y \in X'$,
אם ורק אם $[x] = [y]$.

דוגמאות

1.

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

2. מנה של חבורות:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1)$$

1.6 טענה

$$[x] = [y] \iff [x] \cap [y] \neq \emptyset$$

הוכחה: $\Rightarrow$: טריוויאלי.

$\Leftarrow$: יהי $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, $z \in [x]$, $z \in [y]$, כלומר $z - x \in X'$, $z - y \in X'$. בסך הכל, $(z - y) - (z - x) = x - y \in X'$. ■

מרחב מנה הוא מרחב לינארי עם הפעולות:

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [x + y] \\ a[x] &= [ax] \end{aligned}$$

דוגמאות ראינו כי $C_0 \subseteq C$. נוכיח כי

$$\text{Codim}(C_0) = \dim(C/C_0) = 1$$

נסמן

$$e = \{1, 1, 1, \dots\}$$

עבור $x = \{x_i\} \in C$, נסמן את הגבול שלה בתור a . נשים לב שמתקיים

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i - a \cdot e_i = 0$$

כלומר מתקיים $x - ae \in C_0$, ולכן $[x] = a[e]$, כלומר מחלקת השקילות של כל ווקטור היא כפולה של מחלקת השקילות של e - כלומר מימד המנה הוא 1.

הגדרה 1.7 יהיו $x_1, \dots, x_n \in X$ ווקטורים ויהי X' תת מרחב. נאמר כי $x_1, \dots, x_n$ בלתי תלויים לינארית ביחס למרחב X' אם

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \in X' \iff \forall i \ a_i = 0$$

למה 1.8 $\dim(X/X') = n$ אם ורק אם קיימים $x_1, \dots, x_n \in X$ בלתי תלויים ביחס למרחב X' כך שלכל $x \in X$ קיימת הצגה יחידה

$$x = \sum_{i=1}^n a_i x_i + y$$

כאשר $y \in X'$.

הוכחה: $\Rightarrow$ תרגיל.

$\Leftarrow$ נבחר $[x_1], \dots, [x_n]$ בסיס של X/X' . נראה כי $x_1, \dots, x_n$ בלתי תלויים לינארית ביחס למרחב X' . נניח כי

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \in X'$$

נשים לב כי

$$[0] = [X'] = \left[\sum_{i=1}^n a_i x_i \right] = \sum_{i=1}^n a_i [x_i]$$

וכעת משום שבחרנו את המחלקות כבסיס, נקבל כי $a_i = 0$ לכל i . כעת, יהי $[x] \in X/X'$. יש הצגה (יחידה)

$$[x] = \sum_{i=1}^n a_i [x_i]$$

לכן קיימת הצגה כלשהי

$$x = \sum_{i=1}^n a_i x_i + y$$

כאשר $y \in X'$.
 נותר להראות כי הצגה זו יחידה. נניח כי מתקיים גם

$$x = \sum_{i=1}^n b_i x_i + z$$

כאשר $z \in X'$. כעת,

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) x_i = y - z \in X'$$

ניזכר כי $\{x_i\}$ בלתי תלויים לינארית ביחס למרחב X' , ולכן לכל i $a_i = b_i$, ולכן גם $y = z$.
 ■

1.4 נורמה

הגדרה 1.9 פונקציה $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ נקראת נורמה אם מתקיימים התנאים הבאים:

$$1. \|\alpha\| \geq 0, \text{ וכן } \|\alpha\| = 0 \text{ אם ורק אם } \alpha = 0.$$

$$2. \|a \cdot \alpha\| = |a| \|\alpha\|$$

$$3. \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

מרחב נורמי הוא צמד $(X, \|\cdot\|)$.

דוגמאות

1. נורמה אוקלידית במרחב $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

2. במרחב l_∞ - אוסף הסדרות החסומות -

$$\|\{a_n\}\|_\infty = \sup_n |a_n|$$

3. במרחב l_1 - אוסף כל הסדרות $\{a_n\}$ כך שמתקיים $\sum |a_n| < \infty$

4. במרחב l_p - $\|\{a_n\}\|_p = (\sum |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ עבור $p \geq 1$

5. במרחב $C[0, 1]$,

$$\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

1.4.1 מרחבי מנה נורמיים

יהי X מרחב נורמי, ויהי X' תת מרחב סגור (גבול של כל סדרה מתכנסת שייך למרחב).

משפט 1.10 הנורמה על X/X' המוגדרת על ידי

$$||[x]|| = \inf_{y \in X'} ||x - y||$$

מוגדרת היטב ואינה תלויה בבחירת הנציג.