

מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

© ארזים

27 בנובמבר 2016

1 מרחבי הילברט

1.1 בסיס

טענה 1.1 יהי H מרחב הילברט ספרבילי, ותהי $e_n \in H$ סדרה אורתונורמלית ושלמה. אזי ההעתקה

$$\begin{aligned} T: H &\rightarrow l_2 \\ Tx &= (\langle x, e_n \rangle) \end{aligned}$$

היא איזומטריה על l_2 . כמו כן, לכל $x \in H$ קיים פירוק יחיד

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

עבור $a_n = \langle x, e_n \rangle$.

הוכחה: ראינו כבר בעבר את כל חלקי הטענה, פרט ליחידות a_n . נניח כי $x = \sum a_n e_n$, ונראה כי $a_n = \langle x, e_n \rangle$. נשים לב כי

$$\langle x, e_k \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, e_k \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle e_n, e_k \rangle = a_k$$

■

הגדרה 1.2 $(x_n) \subseteq X$ נקראת בסיס (שאודר) אם לכל $x \in X$ קיים פירוק יחיד $x = \sum a_n x_n$.

מסקנה 1.3 סדרה אורתונורמלית שלמה במרחב הילברט היא בסיס.

דוגמה במרחב $X = C[-1, 1]$, הסדרה $f_n(x) = x^n$ שלמה. ברור כי הווקטורים בה בלתי תלויים לינארית. נראה כי היא לא בסיס. נניח כי עבור f כלשהי יש פירוק יחיד

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

בפרט הטור מתכנס בנקודה $x = 1$, ולכן הטור הוא טור חזקות שמתכנס לפחות בתוך כדור היחידה. לא כל פונקציה רציפה אפשר להביע ככה - למשל $f(x) = |x|$.

טענה 1.4 $g_n = x^{3n}$ שלמה במרחב $C[-1, 1]$ (היה בתרגול).

דוגמא נגדיר את הפולינומים של לז'נדר להיות הסדרה $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ כך שמתקיים $p_n \perp p_k$ לכל $k < n$.

משפט 1.5 אם $p_n(t_0) = 0$ אז $t_0 \in [-1, 1]$.

הוכחה: אם $p_n(t_0) = 0$, אזי קיים $q \in \text{span}\{p_i\}_{i < n}$ כך שמתקיים

$$p_n(t) = (t - t_0)q(t)$$

וכעת

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 p_n(t) \overline{q_n(t)} dt = \int_{-1}^1 (tq(t) - t_0q(t)) \overline{q(t)} dt \\ t_0 \int_{-1}^1 |q(t)|^2 dt &= \int_{-1}^1 t |q(t)|^2 dt \\ t_0 &= \frac{\int_{-1}^1 t |q(t)|^2 dt}{\int_{-1}^1 |q(t)|^2 dt} \end{aligned}$$

■

ומחדוא 2, סיימנו.

באופן כללי, עבור $\varphi > 0$, נגדיר

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} \varphi(t) dt$$

ולפי מכפלה פנימית זו, אם נגדיר שוב פולינומים עם התכונה של פולינומי לז'נדר, נקבל שהשורשים שלהם כולם בקטע $[-1, 1]$ (תרגיל).

1.2 השלמה של מרחב

הגדרה 1.6 בהינתן מרחב מכפלה פנימית E ומערכת $\{e_n\}$ אורתוגונלית ושלמה, ראינו את האיזומטריה $T : X \rightarrow L \subseteq l_2$ על ידי

$$Tx = (\langle x, e_n \rangle)$$

אזי $\bar{L}$ נקרא ההשלמה של X .

דוגמא נראה מרחב שאינו ספרבילי. נגדיר את המרחב

$$E = \text{span} \{e^{i\lambda t}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$$

נוכל להגדיר כעת מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \overline{g(t)} dt$$

נגדיר

$$f_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$$

וכן

$$\delta_{\lambda, \mu} = \langle f_\lambda, f_\mu \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i\lambda t} \overline{e^{i\mu t}} dt$$

אם $\lambda = \mu$, נקבל 1. אחרת

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda, \mu} &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i(\lambda - \mu)t} dt \right| = \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{i(\lambda - \mu)} e^{i(\lambda - \mu)t} \right| \leq \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{2T(\lambda - \mu)} = 0 \end{aligned}$$

לכן המערכת היא אורתונורמלית. נראה כי זה אומר שהמרחב אינו ספרבילי. נניח כי V צפופה. אזי לכל λ קיים $x_\lambda \in V$ כך שמתקיים

$$\|f_\lambda - x_\lambda\| < \frac{1}{2}$$

נבדוק שאם $\lambda \neq \mu$ אזי $x_\lambda \neq x_\mu$. מתקיים

$$\begin{aligned} \|x_\lambda - x_\mu\| &= \|(x_\lambda - f_\lambda) + (f_\lambda - f_\mu) + (f_\mu - x_\mu)\| \geq \\ &\geq \|f_\lambda - f_\mu\| - \|x_\lambda - f_\lambda\| - \|f_\mu - x_\mu\| > \\ &> \|f_\lambda - f_\mu\| - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0 \end{aligned}$$

לכן $|V| \geq \aleph$.

1.3 הטלה מינימלית

תהי $(e_n) \subseteq E \subseteq H$ סדרה אורתונורמלית שלמה בתוך E . ראינו כי הפונקציה

$$P_E x = \sum \langle x, e_n \rangle e_n$$

מגדירה היטל על הסגור של E .

הגדרה 1.7 במרחב ווקטורי L , קבוצה V תקרא קמורה אם לכל $\theta \in (0, 1)$ מתקיים

$$\theta x + (1 - \theta) y \in V$$

לכל $x, y \in V$.

משפט 1.8 (ההטלה המינימלית של ריס) יהי H מרחב הילברט, ותהי V תת קבוצה קמורה וסגורה. אזי לכל $x \in H$ קיים יחיד $y \in V$ כך שמתקיים

$$\|x - y\| = d(x, V) := \inf_{z \in V} \|x - z\|$$

הוכחה: לפי הגדרת המרחק, קיימת סדרה $y_n \in V$ כך שמתקיים

$$\|x - y_n\| \rightarrow d(x, V)$$

נבדוק כי סדרת קושי:

$$y_n - y_m = (x - y_m) - (x - y_n)$$

נסמן $z_n = x - y_n$ ואז

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|z_n - z_m\|^2 = -\|z_n + z_m\|^2 + 2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2$$

מתקיים

$$\frac{z_n + z_m}{2} = x - \frac{y_n + y_m}{2} \in x - V$$

ולכן

$$\|z_n + z_m\| \cdot \frac{1}{2} \leq d$$

כלומר

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2 - 4d^2 \rightarrow 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

לכן לסדרה y_n יש גבול (כי H מרחב הילברט). הגבול $y \in V$ שכן V סגור ומרציפות
 ■ $\|x - y\| = d(x, V)$

משפט 1.9 יהי H מרחב הילברט, ונניח כי $L \subseteq H$ תת מרחב סגור, אזי לכל $x \in H$ קיים
 ויחיד $y \in L$ עד שמתקיים $x - y \perp L$. מסמנים $y = y(x) = P_L x$.

הוכחה: הקבוצה L היא כמובן קמורה וסגורה, ואז לכל x קיים $y = P_L^{\min} x$ כמו במשפט
 הקודם. נבדוק כי $x - y \perp L$. למעשה יש להוכיח כי לכל $z \in L$ מתקיים

$$\langle x - y, z \rangle = 0$$

נגדיר

$$\varphi(\lambda) = \|x - y - \lambda z\|^2$$

לכל $\lambda \in \mathbb{C}$ מתקיים $y - \lambda z \in L$, ולכן

$$\varphi(\lambda) \geq d(x, L)^2 = \|x - y\|^2 = \varphi(0)$$

לכן 0 היא מינימום של הפונקציה. כעת, נציב $\lambda = t \langle x - y, z \rangle$ ונחשב:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \|x - y\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle x - y, \lambda z \rangle + |\lambda|^2 \|z\|^2 = \\ &= \|x - y\|^2 - 2\operatorname{Re} \left(t |\langle x - y, z \rangle|^2 \right) + t^2 |\langle x - y, z \rangle|^2 \|z\|^2 =: \psi(t) \end{aligned}$$

לפונקציה יש מינימום בנקודה 0, והיא גזירה, ולכן הנגזרת שלה מתאפסת בנקודה 0. לכן

$$|\langle x - y, z \rangle|^2 = 0$$

נותר להראות את יחידות y . ניקח y_1, y_2 עבורם $x - y_1 \perp L, x - y_2 \perp L$. אזי מתקיים

$$y_1 - y_2 = (x - y_2) - (x - y_1) \perp L$$

■ אבל $y_1 - y_2 \in L$, ולכן מאונך לעצמו, כלומר 0. לכן $y_1 = y_2$.

טענה 1.10 $P_L \in \mathcal{L}(H)$, וכן

$$\begin{aligned} P_L^2 &= P_L \\ \|P_L\| &= 1 \end{aligned}$$

לכל $L \neq \{0\}$.

הוכחה: יהיו λ_1, λ_2 סקלרים, ונגדיר $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $x_1, x_2 \in H$
 $x - \lambda_1 P_L x_1 - \lambda_2 P_L x_2 = \lambda_1 (x_1 - P_L x_1) - \lambda_2 (x_2 - P_L x_2) \perp L$

קיבלנו כי P_L אכן לינארית. כעת ידוע כי

$$P_L x \in L, x - P_L x \perp L$$

ולכן $P_L x \perp x - P_L x$ כלור

$$\begin{aligned} x &= P_L x + (x - P_L x) \\ \|x\|^2 &= \|P_L x\|^2 + \|x - P_L x\|^2 \geq \|P_L x\|^2 \end{aligned}$$

■ לכן נקבל $P_L \in \mathcal{L}(H)$, וכן $\|P_L\| \leq 1$. אם $x \in L$, אזי ברור כי $P_L(x) = x$.

1.4 משלים ניצב

הגדרה 1.11 יהי H מרחב הילברט, ותהי $V \subseteq H$ תת קבוצה. נגדיר

$$V^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in V \ x \perp y\}$$

זהו המשלים האורתוגונלי של V .

מתקיים

$$V^\perp = \bigcap_{y \in V} \{y\}^\perp$$

כל $\{y\}^\perp$ הוא תת מרחב סגור, ולכן גם $V^\perp$ תת מרחב סגור.

מסקנה 1.12 יהי H מרחב הילברט, ויהי $L \subseteq H$ תת מרחב סגור, אזי

$$(L^\perp)^\perp = L$$

הוכחה: קיים פירוק יחיד $x = y + z$ לכל x כאשר $y \in L, z \in L^\perp$. אם $x \in L$, לכל $y \in L^\perp$ מתקיים $x \perp y$ ואז $x \in (L^\perp)^\perp$.

כעת נותר להראות כי $(L^\perp)^\perp \subseteq L$. יהי $x \in (L^\perp)^\perp$. נוכל לכתוב

$$x = P_L x + (x - P_L x)$$

כמובן $P_L x \in L \subseteq (L^\perp)^\perp$, ולכן קיבלנו את הפירוק של x בהטלה למרחב $L^\perp$. אבל יש עוד פירוק כזה $x = 0 + x$. לכן $x - P_L x = 0$, כלומר $x = P_L x \in L$. ■

מסקנה 1.13 אם H מרחב הילברט, $V \subseteq H$, אזי

$$(V^\perp)^\perp = \overline{\text{span} V}$$

הוכחה: ברור כי $(V^\perp)^\perp \supseteq V$, ואז $(V^\perp)^\perp \subseteq \overline{\text{span} V}$. נסמן $L = \overline{\text{span} V}$. כעת

$$V \subseteq L \iff L^\perp \subseteq V^\perp \iff L = L^{\perp\perp} \supseteq V^{\perp\perp}$$

■

וסיימנו.

מסקנה 1.14 $\{x_n\} \subseteq H$ שלמה אם ורק אם $\{x_n\}^\perp = \{0\}$.

הוכחה:

$$\overline{\text{span}(\{x_n\})} = \{x_n\}^{\perp\perp}$$

כעת, זה שווה H אם ורק אם

$$\{x_n\}^{\perp\perp} = \{x_n\}^\perp = \{0\}$$

■

2 פונקציונאלים לינאריים

2.1 מרחבים לינאריים כלליים

הגדרה 2.1 נניח כי X מרחב לינארי מעל השדה $\mathbb{K}$. נגדיר כעת:

$$X^\# = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \mid f \in \text{Lin}(X, \mathbb{K})\}$$

כל האיברים בו נקראים פונקציונאלים. הגרעי של הפונקציונאל מוגדר כרגיל.

טענה 2.2 יהי $f \in X^\#$, $f \neq 0$. אזי $\text{codim ker } f = 1$.

הוכחה: $f \neq 0$, ולכן $X / \text{ker } f \neq \{0\}$. ניקח x עבורו $f(x) \neq 0$. נגדיר $y = \frac{x}{f(x)}$. אזי מתקיים $[y] \neq 0$, ונבדוק שמתקיים

$$[z] = f(z) [y]$$

זה שקול לכך שמתקיים

$$\begin{aligned} [z - f(z)y] &= 0 \\ f(z - f(z)y) &= 0 \\ f(z)(1 - f(y)) &= 0 \end{aligned}$$

ובחרנו את y כך שיתקיים

$$f(y) = 1$$

לכן סיימנו. ■

טענה 2.3 אם $L \subseteq X$ תת מרחב עבורו $\text{codim} L = 1$, אזי קיים פונקציונאל $f \in X^\#$ כך שמתקיים $L = \ker f$.

הוכחה: X/L מממד 1, ולכן קיים $z \in X \setminus L$ כך שלכל $x \in X$ קיים λ יחיד עבורו

$$[x] = \lambda [z]$$

ברור כי ההתאמה הזו בין x לבין λ היא פונקציונאל לינארי שגרעינו L . ■

טענה 2.4 נניח כי $f, g \in X^\#$, ונניח כי $\ker f \subseteq \ker g$. אזי קיים λ עבורו $g = \lambda f$.

הוכחה: אם $\ker f = X$ אזי $f = 0, g = 0, \lambda = 0$. לכן בלי הגבלת הכלליות קיים $y \in X$ עבורו $f(y) \neq 0$. יהי $x \in X$, ונשים לב כי

$$x - f(x) \frac{y}{f(y)} \in \ker f$$

בחישוב דומה לפני שתי טענות הוכחנו את השייכות הזו:

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(y)}y\right) = f(x) - f(x) \frac{f(y)}{f(y)} = 0$$

כעת מתקיים גם

$$\begin{aligned} g\left(x - \frac{f(x)}{f(y)}y\right) &= g(x) - \frac{f(x)}{f(y)}g(y) = 0 \\ g(x) &= \frac{g(y)}{f(y)}f(x) \end{aligned}$$

וזה נכון לכל x : נגדיר $\lambda = \frac{g(y)}{f(y)}$ ונסיים. ■

2.2 מרחבים נורמיים

הגדרה 2.5 יהי X מרחב נורמי. אזי נסמן

$$X^\# \cap \mathcal{L}(x, \mathbb{K}) = X^*$$

מרחב זה נקרא המרחב הדואלי או הצמוד של X .
זה מרחב נורמי עם הנורמה שכבר ראינו

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$$

טענה 2.6 אם $f \in X^\#$, אזי f חסום אם ורק אם $\ker f$ הוא תת מרחב סגור.

הוכחה: אם f חסומה, אז

$$\ker f = f^{-1}(\{0\})$$

אבל f רציפה, ולכן תמונה הפוכה של קבוצה סגורה היא קבוצה סגורה.
כעת, אם $\ker f$ סגור, נניח בשלילה כי f אינה חסומה. כלומר קיימים x_n , $\|x_n\| \leq 1$,
כך שמתקיים $f(x_n) \rightarrow \infty$. אפשר לבחור אותם כך שמתקיים $f(x_n) \neq 0$. נגדיר

$$y_n = \frac{x_n}{f(x_n)} \rightarrow 0$$

כמובן מתקיים

$$f(y_n) = 1$$

$y_n \notin \ker f$ כתוצאה מזה. עכשיו נגדיר

$$z_n = y_n - y_1$$

נקבל

$$f(z_n) = 0$$

■

כלומר $z_n \in \ker f$. כמו כן $z_n \rightarrow -y_1 \notin \ker f$ בסתירה.