

# מבוא למרחבי הילברט ותורת האופרטורים

© ארזים

20 בנובמבר 2016

## 1 תזכורת

**טענה 1.1** המכפלה הפנימית  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  היא פונקציה רציפה מהמרחב  $E \times E$ .

**הוכחה:** יהי  $y, x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$  ונרצה להראות כי  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ . ולכן  $x_n$  חסומה, כלומר קיים  $C_1$  כל שלכל  $n$  מתקיים  $\|x_n\| \leq C_1$  (שכן  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  ולכן  $\|x_n\| \leq \|x\| + \|x_n - x\|$ ). גם  $y_n$  חסומה, מאותה סיבה, ובסך הכל קיים  $0 < C < \infty$  כך שלכל  $n$  מתקיים

$$\|x_n\|, \|y_n\| \leq C$$

כעת,

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle - \langle x_n, y_n \rangle| &\leq |\langle x, y \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x_n, y_n \rangle| = |\langle x - x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y - y_n \rangle| \leq \\ &\leq \|x - x_n\| \|y\| + \|x_n\| \|y - y_n\| \rightarrow 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

■

בשיעור שעבר ראינו את הגדרת האורתוגונליות ואורתונורמליות, דנו בקירוב של  $x$  על ידי הטלה למערכת אורתוגונלית, וראינו את אי שוויון בסל: אם  $\{e_n\}$  סדרה אורתונורמלית אזי לכל  $x \in E$  מתקיים

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

לאחר מכן ראינו משפט חשוב, שאמר שהתנאים הבאים שקולים כאשר  $\{e_n\}$  אורתונורמלית:

$$1. x \in \overline{\text{span} \{e_n\}_{n=1}^\infty}$$

$$2. x = \sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k \rangle e_k$$

$$3. \|x\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |\langle x, e_k \rangle|^2$$

## 2 מרחבי הילברט

**הגדרה 2.1** יהי  $X$  מרחב נורמי, ותהי  $\{x_n\} \subseteq X$  סדרה. הסדרה נקראת סדרת קושי אם מתקיים

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

### תכונות

1. אם  $x_n \rightarrow x$  אזי  $\{x_n\}$  סדרת קושי.

2. אם  $\{x_n\}$  סדרת קושי אזי היא חסומה.

**הגדרה 2.2** מרחב נורמי  $X$  נקרא מרחב שלם (או מרחב בנך) אם לכל סדרת קושי יש גבול במרחב.

מרחב מכפלה פנימית שלם נקרא מרחב הילברט.

### דוגמאות

1. המרחב  $C[a, b]$  הוא מרחב בנך. נניח כי  $\{f_n\}$  סדרת קושי, כלומר

$$\max_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f_m(t)| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

לכל  $t \in [a, b]$  קבוע,  $f_n(t)$  היא סדרת קושי של מספרים, כלומר מתכנסת. נגדיר

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

כעת, מתנאי קושי להתכנסות במידה שווה,  $f_n$  מתכנסת במידה שווה אל  $g$ , מה שאומר שזה מתכנס גם בנורמה, וידוע כי גבול במידה שווה של פונקציות רציפות הוא רציף, ולכן  $f_n \rightarrow g, g \in C[a, b]$  כנדרש.

2. המרחב  $l_p$ , עבור  $1 \leq p < \infty$  הוא שלם. נניח כי  $\{X^n\}$  סדרת קושי, כאשר  $X^n = (X_1^n, \dots, X_k^n)$ . ברור כי לכל  $z \in l_p$  מתקיים  $\|z\| \geq \|z_j\|$  לכל  $j$ . לכן, לכל  $j$ , מתקיים

$$\|X_j^n - X_j^m\| \leq \|X^n - X^m\| \rightarrow 0$$

לכן לכל  $j$  הסדרה  $\{X_j^n\}_{n=1}^\infty$  היא סדרת קושי של מספרים, כלומר יש גבול  $a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} X_j^n$ .

כעת,  $X^n$  קושי, ולכן חסומה, כלומר קיים  $0 < C < \infty$  כך שלכל  $n$  מתקיים  $\|X^n\| \leq C$ . לכל  $N$  מתקיים

$$\sum_{j=1}^N |a_j|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N |X_j^n|^p \leq C^p$$

ואז נקבל כי  $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p$  מתכנס, כלומר  $a = (a_1, \dots, a_n) \in l_p$ . נראה כי  $X^n \rightarrow a$ .  
יהי  $\varepsilon > 0$ . קושי, ולכן קיים  $M$  כל שלכל  $m, n > M$  מתקיים

$$\|X^n - X^m\| < \varepsilon$$

לכל  $N$  מתקיים

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |X_j^n - a_j|^p &= \sum_{j=1}^N |X_j^n - \lim_{m \rightarrow \infty} X_j^m|^p = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N |X_j^n - X_j^m|^p \leq \\ &\leq \overline{\lim_{M < m \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^{\infty} |X_j^n - X_j^m| \leq \varepsilon^p \end{aligned}$$

וכעת לכל  $n < M$  מתקיים

$$\|X^n - a\|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} |X_j^n - a_j|^p \leq \varepsilon^p$$

ולכן  $l_p$  מרחב שלם. עבור  $p = 2$ , מקבלים מרחב הילברט, על ידי

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$$

3. המרחב  $C_{(p)}[-1, 1]$  אינו מרחב בנך. נראה דוגמא:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & t \geq \frac{1}{n} \\ -1 & t \leq -\frac{1}{n} \\ nt & -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n} \end{cases}$$

זו סדרת קושי, והיא שואפת לפונקציה הגבולית

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

(הפונקציה לא רציפה, אבל אפשר להרחיב מעט את המרחב לפונקציות אינטגרביליות רימן). כעת,

$$\int_{-1}^1 |f_n(t) - f(t)|^p dt \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 2^p dt = \frac{2^{p+1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

אז  $\{f_n\}$  סדרת קושי בתוך  $R_p[-1, 1]$ , אבל  $C_p[-1, 1] \subseteq R_p[-1, 1]$ , ולכן הן קושי גם בתוך  $C_p[-1, 1]$ . נניח שקיים  $g \in C_p[-1, 1]$  כך שמתקיים  $\|f_n - g\| \rightarrow 0$ , ואז מתקיים

$$\int_0^1 |f_n(t) - g(t)|^p dt \rightarrow 0$$

כמוכן, ראינו כבר כי זה מתקיים עבור  $f$ . נובע כי

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)| dt = 0$$

לכן נובע כי  $f(t) = g(t)$  לכל  $t \in (0, 1]$ . באותה צורה מקבלים  $f(t) = g(t)$  לכל  $t \in [-1, 0)$ , אבל זו סתירה, כי אז  $g$  לא רציפה.

**טענה 2.3** אם המרחב  $X$  הוא מרחב בנך, והמרחב  $Y \subseteq X$  הוא תת מרחב סגור, אזי  $Y$  הוא מרחב בנך.

**הוכחה:** תהי  $\{y_n\} \subseteq Y$  סדרת קושי. לכן היא גם סדרת קושי בתוך  $X$ , שהוא מרחב בנך, ולכן היא מתכנסת לגבול  $y \in X$ . אבל  $Y$  תת מרחב סגור, ולכן  $y \in Y$ , והוכחנו כי  $Y$  מרחב בנך. ■

**משפט 2.4** יהי  $X$  מרחב נורמי. אזי קיימים מרחבים  $\hat{X} \supseteq Y$  כך שהמרחב  $\hat{X}$  הוא מרחב בנך, המרחב  $Y$  איזומטרי למרחב  $X$ , וכן  $Y$  צפוף בתוך  $\hat{X}$ , כלומר  $\overline{Y} = \hat{X}$ .

**הוכחה:** ראשית נגדיר מרחב גדול  $\overline{X}$ , שהאיברים בו הם סדרות קושי של איברי  $X$ . עליו נגדיר חצי נורמה:

$$p(x) = \lim \|x_n\|$$

כעת  $\overline{X}$  הוא שם ביחס לחצי נורמה  $p$ . נגדיר  $\hat{X} = \overline{X} / \ker p$ . כמו כן, ההעתקה  $T : X \rightarrow \hat{X}$  על ידי  $Tx = (x, \dots, x, \dots)$  היא איזומטריה בין  $X$  לתת מרחב של  $\hat{X}$ . ■

**משפט 2.5** נניח כי  $H$  מרחב הילברט, וכי  $\{e_n\} \subseteq H$  אורתונורמלית. אזי לכל  $(a_n) \in l_2$  הטור  $\sum a_n e_n$  מתכנס, ובפרט לכל  $x \in H$  יש התכנסות של הטור  $\sum \langle x, e_n \rangle e_n$ .

**הוכחה:** נגדיר לכל  $m$  את הווקטור

$$s_m = \sum_{n=1}^m a_n e_n$$

נוכיח כי זו סדרת קושי, ולכן היא תתכנס.

$$\|s_m - s_k\|^2 = \left\| \sum_{n=k+1}^m a_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=k+1}^m |a_n|^2 \rightarrow 0$$

וזאת מתוך קריטריון קושי להתכנסות של טורים.  $H$  מרחב הילברט, לכן סדרת קושי מתכנסת, וסיימנו.

בפרט, מאי שוויון בסל מתקיים  $\sum |\langle x, e_n \rangle|^2 < \infty$ , ולכן הטור  $\sum \langle x, e_n \rangle e_n$  מתכנס. ■

**מסקנה 2.6** אם  $H$  מרחב הילברט,  $\{e_n\}$  אורתונורמלית, אזי ההעתקה

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow l_2 \\ Tx &= (\langle x, e_n \rangle) \end{aligned}$$

היא על.

**הוכחה:** נניח כי  $a = (a_n) \in l_2$ . נגדיר

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

ואז נקבל כי

$$\langle x, e_k \rangle = \left\langle \sum a_n e_n, e_k \right\rangle = \sum a_n \langle e_n, e_k \rangle = a_k$$

■

ולכן  $Tx = a$

**מסקנה 2.7** אם  $H$  מרחב הילברט,  $\{e_n\}$  אורתונורמלית עם  $E = \overline{\text{span}\{e_n\}}$ , אזי

$$x \rightarrow Px = \sum \langle x, e_k \rangle e_k$$

היא הטלה אורתוגונלית על  $E$ , כלומר לכל  $x \in E$  מתקיים  $Px = x$ , ולכן  $y \in H$  מתקיים  $Py \in E, y - Py \perp E$ .

**הוכחה:** בשעור הקודם ראינו כי  $Px = x$  במצב הזה. עבור  $y \in H$  מתקיים  $Py \in E$  שכן

$$Py = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \langle y, e_k \rangle e_k$$

כעת נותר להראות כי  $y - Py \perp e_k$  לכל  $k$ . נקבל

$$\langle y - Py, e_k \rangle = \langle y, e_k \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle \langle e_n, e_k \rangle = 0$$

■

ולכן סיימנו.

**הגדרה 2.8** יהי  $X$  מרחב נורמי. סדרה  $\{x_n\}$  תקרא שלמה אם מתקיים  $\overline{\text{span}\{x_n\}} = X$ .

**מסקנה 2.9** יהי  $E$  מרחב מכפלה פנימית, ותהי  $\{e_n\}$  סדרה אורתונורמלית שלמה. אזי ההעתקה  $Tx = (\langle x, e_n \rangle) \in l_2$  היא איזומטריה לינארית על  $\text{Im}T$ . אם  $E$  מרחב הילברט, אז  $T$  היא איזומטריה על  $l_2$ .

**מסקנה 2.10** במקרה זה  $\overline{\text{Im}T} \subseteq l_2$  היא השלמה של המרחב  $E$ .

**טענה 2.11** (האורתונורמליזציה של גרס-שמידט) יהי  $E$  מרחב מכפלה פנימית, ונניח כי  $\{x_n\}$  סדרת ווקטורים בלתי תלויים לינארית, ונגדיר  $E_k = \text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$ . אזי קיימת סדרה אורתונורמלית  $\{e_n\}$  כך שמתקיים  $\text{span}(e_n)_{n=1}^k = E_k$  לכל  $k$ . בפרט, אם  $\{x_n\}$  סדרה שלמה, גם  $\{e_n\}$  סדרה שלמה.

**הוכחה:** נגדיר  $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ . נמשיך על ידי

$$\begin{aligned} y_2 &= x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1 \\ e_2 &= \frac{y_2}{\|y_2\|} \end{aligned}$$

כך ניתן להמשיך באינדוקציה על ידי

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= x_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i \\ e_{k+1} &= \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|} \end{aligned}$$

■

**הגדרה 2.12** מרחב נורמי  $X$  ייקרא ספרבילי אם קיימת סדרה  $\{x_n\} \subseteq X$  המקיימת  $\overline{\text{span}\{x_n\}} = X$  (קיימת קבוצה צפופה בת מניה).

**מסקנה 2.13** בכל מרחב מכפלה פנימית ספרבילי קיימת סדרה שלמה.

**הוכחה:** נגדיר סדרה חדשה.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{\min\{j | x_j \neq 0\}} \\ y_2 &= x_{\min\{j | x_j \notin \text{span}\{y_1\}\}} \\ &\vdots \\ y_{n+1} &= x_{\min\{j | x_j \notin \text{span}\{y_k\}_{k=1}^n\}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

ברור מהבניה כי  $\{y_n\}$  בלתי תלוייה לינארית. נשים לב שמתקיים

$$\text{span}\{y_k\}_{k=1}^n \supseteq \text{span}\{x_k\}_{k=1}^n$$

נוכל לבנות מתוך  $\{y_n\}$  סדרה אורתונורמלית לפי גרס־שמידט, והיא שלמה בגלל שהקבוצה  $\{x_n\}$  צפופה. ■

**מסקנה 2.14** כל מרחב הילברט ספרבילי איזומטרי למרחב  $l_2$ .