תרגול

מבנה ~~[illegible]~~ 4 ~~[illegible]~~

פתרון נוסחאות רקורסיה

הצבה

איטרציה

שיטת המאסטר

דוגמא בהצבה: $T(1) = 1$ $\quad T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$

ננחש לפתרון: $T(n) \le c \cdot n \log n$ עבור c מסוים

נניח נכונות עבור $\frac{n}{2}$:

$$T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \le c \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

הצבה:

$$T(n) \le 2\left(c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \le$$

$$\le c \cdot n \cdot \log\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \le c \cdot n \cdot \log n - c \cdot n \cdot \cancel{\log 2} + n \le$$

$$\le c\, n \log(n) - c\, n + n \le c \cdot n \log n \quad \forall c \ge 1$$

צריך להוכיח תנאי קצה.

עבור $n=2$

$$T(2) = 2T(1) + 2 = 4 \le c \cdot 2 \cdot \log 2$$

אולי גם $n=3$ צריך להוכיח לבד

$$T(3) = 2T(1) + 3 = 5 \le c \cdot 3 \log(3)$$

שיטת הניחוש:

מתמטיקה פתרון

הערה: כאשר ...

משתנה ...

Brute Force סיבוכיות

$T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n$ $T(1) = \Theta(1)$ בהנחה.

$$T_n = n + 3\cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{4}\right\rfloor\right) = n + 3\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor + 3T\left(\left\lfloor\frac{n}{16}\right\rfloor\right)\right) =$$

$$= n + 3\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor + 9\frac{n}{16} + 27T\left(\left\lfloor\frac{n}{64}\right\rfloor\right) \dots$$

$$T(n) = n + \frac{3}{4}n + \frac{9}{16}n + \frac{27}{64}n + \dots + 3^{\log_4(n)}\Theta(1) \leq$$

$$\leq n\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right) \leq$$

$$\leq n\cdot 4 + \Theta(n) = O(n)$$

$n^{\log_4 3} < n^1 \leftarrow \log_4 3 < 1$

שיטת המאסטר

בהינתן אלגוריתמים עם נוסחת נסיגה מהצורה:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

כאשר a,b קבועים.

הפתרון תלוי "בגודל" של $f(n)$

1) אם $f(n)$ "קטן"

$f(n) = O\left(n^{\log_b a - \epsilon}\right)$

$\epsilon > 0$, לכל קבוע ממש

$\Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

אם $f(n)$ "בינוני"

$f = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\cdot \log n\right)$

אם $f(n)$ "גדולה"

$$f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \epsilon}\right)$$

$$a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$$ אם מתקיים

עבור $c < 1$ כלשהו.

$$T(n) = \Theta(f(n))$$ אז

דוגמאות $$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

1)

$$\log_b a = \log_3 9 = 2$$

$$f(n) = O(n) = O(n^{2-1}) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_3 9}) = \Theta(n^2)$$

2)

$$T(n) = T\left(\frac{2}{3}n\right) + 1$$

$$\log_b a = \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$$

$$f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n) = \Theta(\log n)$$

3)

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log n$$

$$\log_b a = \log_4 3 < 0.8 \qquad f(n) = \Omega(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \epsilon}\right)$$

$$a f\left(\frac{n}{b}\right) = 3\frac{n}{4}\log\frac{n}{4} \leq \frac{3}{4} n \log n \leq c \cdot f(n) \qquad c = \frac{3}{4} < 1$$

$$T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\log n)$$ מקרה 3

מבני נתונים תרגול 4 המשך

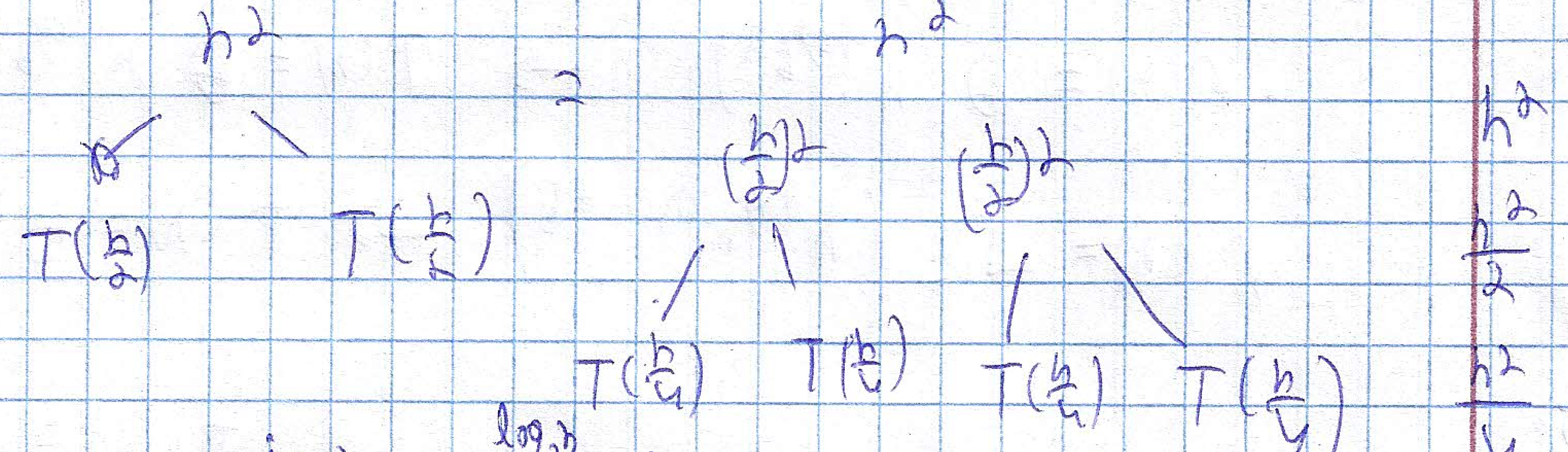
רקורסיה :

$$T(n) = a\,T(g(n)) + h(n)$$

$$T(n) = \Theta(f(n))$$ נרצה $f(n)$ שמקיים

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$T(n) =$



$$T(n) = \sum \frac{2^i n^2}{2^{2i}} = \sum_{i=0}^{\log_2 n} \frac{n^2}{2^i} \le n^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\right) \le 2n^2$$

$$= \Theta(n^2)$$

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{7}\right) + n$$

$$= 9\cdot\left(9\cdot T\left(\frac{n}{49}\right) + \frac{n}{7}\right) + n =$$

$$= 81\,T\left(\frac{n}{49}\right) + \frac{9}{7}n + n =$$

$$= 9^3\,T\left(\frac{n}{7^3}\right) + \frac{81}{7^2}n + \frac{81}{7^2}n + \frac{9}{7}n + n$$

$$= 9^k\,T\left(\frac{n}{7^k}\right) + n\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{9}{7}\right)^i\right)$$

$$k = \lceil \log_7 n \rceil$$

[illegible]

$$T(n) = 9^{\log_7(n)+1}\,\underbrace{T\left(\frac{n}{7^{\log n+1}}\right)}_{\text{קבוע}} + n\left(\sum_{i=1}^{\log_7 n}\left(\frac{9}{7}\right)^i\right) =$$

$$= 9^{\log_7 n} + n\,\frac{\left(\frac{9}{7}\right)^{\log_7 n} - 1}{\frac{2}{7}} = 9^{\log_7 n} + \frac{n}{7^{\log_7 n}}\cdot 9^{\log_7 n} =$$

$$= 7^{(\log_9 7)(\log_7 n)} + \frac{n}{n}\cdot 7^{\log_9 7\cdot\log_7 n} = \Theta\left(n^{\log_7 9}\right)$$

Master Theorem שיטת המאסטר

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

משווים → $f(n) \overset{?}{} n^{\log_b a}$

1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}(\log n))$

3. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{7}\right) + n$$

הנח קיים ε קטן

$f(n) = O(n^{\log_7 9 - \varepsilon})$

$\log_7 9 \sim 1.2 > 1$

נבחר $\varepsilon = 0.1$

$$f(n) = n = O(n^{\log_7 9 - \varepsilon}) \approx O(n^{1.1})$$

מקרה 1. לכן

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_7 9})$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 10n \qquad a = b = 2 \quad f(n) = 10n$$

$$10n \overset{?}{=} O(n^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{1-\varepsilon})$$

לא קיים ε כזה

$$10n \overset{?}{=} \Theta(n^{\log_b a}) \quad \checkmark$$

מקרה 2. לכן

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n) = \Theta(n\log n)$$

לא מאסטר:

$$T(n) = \sqrt{n}\, T(\sqrt{n}) + n$$

$$T(n) = \sqrt{n}\left(\sqrt{\sqrt{n}}\, T(\sqrt[4]{n}) + \sqrt{n}\right) + n = \sqrt{n}\cdot\sqrt{\sqrt{n}} \ldots$$

[illegible]

נוסחה של h מפצ'ים: שמק"מ!

$\boxed{n = 2^{2^m}}$

$T(n) = T(2^{2^m}) = \sqrt{2^{2^m}}\, T\left(\sqrt{2^{2^m}}\right) + 2^{2^m}$ מכן

$\sqrt{2^{2^m}} = 2^{2^{m-1}}$

$= 2^{2^{m-1}} T\left(2^{2^{m-1}}\right) + 2^{2^m} = \underbrace{2^{2^{m-1}} \Big(2^{2^{m-1}}}_{2^{2^m}} + 2^{2^{m-2}} \cdot T\left(2^{2^{m-2}}\right)\Big) + 2^{2^m} =$

$= m\, 2^{2^m} = n \log\log n$

בעזרת

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n\log^2 n$

לא מ-מאסטר

master theorem

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n\log^2 n = 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\log^2\frac{n}{2}\right) + n\log^2 n =$

$= 4T\left(\frac{n}{4}\right) + n\left(\log^2 n + \log^2\frac{n}{2}\right) = \dots =$

$= n\left(\log^2 n + \log^2\frac{n}{2} + \log^2\frac{n}{4} \dots\right)$

$\frac{n}{2^{\frac{\log n}{2}}} = n\sqrt{\frac{1}{2^{\log n}}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

סכמיות החלי הראשון של הסכום (נהפוך את כל ה[illegible] לבינאר קטן) [illegible]

$T(n) \geq \frac{\log n}{2} \cdot n\log^2\left(\frac{n}{2^{\frac{\log n}{2}}}\right) = \frac{\log n}{2} \cdot n\log^2\sqrt{n} =$

$n\log^2\left(\frac{n}{2^{\frac{\log n}{2}}}\right)$ [illegible]

$= \frac{\log n}{2} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\log n\right)^2 = \frac{1}{8} n\log^3 n = \Omega(n\log^3 n)$

$T(n) \leq \overbrace{n\log^2 n + n\log^2 n + \dots + n\log^2 n}^{\text{פעמים } \log n} = \log n\,(n\log^2 n) =$

$= n\log^3 n = O(n)$

$T(n) = \Theta(n\log^3 n)$