

קירובים דייופנטיים (שברים מומלטים)

תצבורת

משפט דייופנטי - אינך יכול פתחנות - $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$

שברים מומלטים: אינך $p \in \mathbb{Q}$, $x \notin \mathbb{Q}$, $x = [a_0; a_1, \dots]$, $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

בתורו של מדידיו - אחרת רצו את יוט סדק בק שכל p, q $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^2}$

משפט עיוני - אם x אלגברי מדרגה d (פולינום) עם מקדמים שלמים מדרגה d ובל $\mathbb{Q}$ אינך $x \notin \mathbb{Q}$ אז $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $x \neq \frac{p}{q}$

$$|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^d}$$

מסקנה - אלגבריים מדרגה 2 הם מקורבים רע.

הזדרה - אם $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ נאמר ש- x מחזורי מתקם מסוים אם קיימים $K \geq 1$ ו- K שכל $n \geq K$ $a_n = a_{n+K}$

דוגמה - $x = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\phi = [1; 1, 1, 1, \dots]$

$x = [5; 2, 7, 4, 1, 7, 4, 1, \dots]$

סימון - $x = [5; 2, \overline{7, 4, 1}]$

משפט עברני - א אלגברי מדרגה 2 $\leftrightarrow x$ מחזורי מתקם מסוים

תצבורת - הוכחנו $A = \begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

היזרנו בתפועל בתחילת הסמסטר: $GL(2, \mathbb{Z})$ - מטריצות ב-2 עם מקדמים שלמים ו- $\det = \pm 1$

נשים לב ש- $A \in GL(2, \mathbb{Z})$

באותו תרגיל הוכחנו שכל $g \in GL(2, \mathbb{Z})$ ניתן לפרש כ:

$$g = u^{r_1} v^{s_1} u^{r_2} v^{s_2} \dots u^{r_k} v^{s_k}, \quad u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, r_i, s_i \in \mathbb{Z}$$

השכיח ההוכחה נעזר במה הנדחית ומשלים:

אם $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ מטריצה ב-2 הפיכה עם מקדמים שלמים ממשיים/מרוכבים

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}$$

אז x שלם/ממשי/מרוכב אז נסמן

נוכיח בתרגיל - אם g, g_1 מטריצה כזו, אז:

$$g_1(g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x = x$$

ונוסיף שכל $g \in GL(2, \mathbb{Z})$ אפשר לכתוב כ-

$P(x) = Ax^2 + Bx + C, P(\alpha) = 0$
 $(A, B, C \in \mathbb{Z}, A \neq 0)$

$\alpha = [\alpha_0; \alpha_1, \alpha_2, \dots]$ נניח α מספר רציונלי, $\alpha \in \mathbb{Q}$
 נניח α אי-רציונלי, $\alpha \notin \mathbb{Q}$

$\alpha_k = [\alpha_k; \alpha_{k+1}, \dots], \alpha_0 = \alpha$

$\alpha_{k+m} = \alpha_k$ - שווה, $k \geq 0, k+m$

$\alpha_{k+d} =$ המספר ה- d של המספר α_k
 $=$ המספר ה- d של המספר α_{k+m}
 $= \alpha_{k+d+m}$

נניח שיש המספרים α_k הם מספרים רציונליים, ופונקציות מטוטלות $P_k(x) = A_k x^2 + B_k x + C_k$
 כאשר A_k, B_k, C_k מסומים.

נניח $P_k = P_{k+m}$ - שווה, $k \geq 0, k+m$

נניח שיש מספר סופי של פונקציות (כאשר)

$\alpha_0 = [\alpha_0; \alpha_1, \alpha_2, \dots] = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots}} = \alpha_0 + \frac{1}{[\alpha_1; \alpha_2, \dots]} = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1} =$

$= \frac{\alpha_0 \alpha_1 + 1}{\alpha_1} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \alpha_1$

$\alpha_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha_1 = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha_2 = \dots =$

$= \begin{bmatrix} \alpha_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{bmatrix} \alpha_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha_{k+1} = \begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix} \alpha_{k+1}$

$0 = Ay^2 + By + C =$ שווה, $P(y) = 0$, $y = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} x$

$= A \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^2 + B \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) + C \iff$

$\iff 0 = A(ax+b)^2 + B(ax+b)(cx+d) + C(cx+d)^2 \iff$

$\iff 0 = (Aa^2 + Bac + Cc^2)x^2 + (2Aab + B(ad+bc) + 2Ccd)x + (Ab^2 + Bbd + Cd^2)$

הוכחנו ש- α_{k+1} מספר רציונלי, $\alpha_k \in \mathbb{Q}$

נניח α_k מספר רציונלי, $\alpha_k \in \mathbb{Q}$

$A_k = A p_k^2 + B p_k q_k + C q_k^2 = q_k^2 (A \left(\frac{p_k}{q_k} \right)^2 + B \left(\frac{p_k}{q_k} \right) + C) = q_k^2 P\left(\frac{p_k}{q_k}\right) =$

$= q_k^2 A \left(\frac{p_k}{q_k} - \alpha \right) \left(\frac{p_k}{q_k} - \beta \right)$

$P(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)$
 P על α, β

$|A_k| \leq |A| \cdot \underbrace{\left| q_k^2 \cdot \left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha \right| \cdot \left| \frac{p_k}{q_k} - \beta \right| \right|}_{\text{מספרים}} \Rightarrow |A_k| \leq |A| \cdot \underbrace{\left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha \right|}_{\text{מספר}} \cdot \underbrace{\left| \frac{p_k}{q_k} - \beta \right|}_{\text{מספר}}$

~~$C_k = A p_{k-1}^2 + B p_{k-1} q_{k-1} + C q_{k-1}^2$~~

~~$C_k = A p_{k-1}^2 + B p_{k-1} q_{k-1} + C q_{k-1}^2$~~

$$C_k = A p_{k-1}^2 + B p_{k-1} q_{k-1} + C q_{k-1}^2$$

C_k חסום -

$$\frac{p_k}{q_k}$$

הנקודות

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$$

אם אותה הנקודה תצא, אז

$$\Delta_k = B_k^2 - 4A_k C_k = \Delta_0 = B^2 - 4AC$$

כדי להשוות ש- B_k חסום, נראה ש-
 Δ_k תלוי ב- k .
 נכון יבוא ש-

$$|B_k| = \sqrt{\Delta_k + 4A_k C_k}$$

הצטרף מבוס עם מקצתם שלמים לא מתנה? יסוקר וימנעו!
 מבין הצדדים, u, v הצטרף המבוס u, v מהתרגום.

$$Ay^2 + By + C = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = u$$

$$Cx^2 + Bx + A = 0$$

הביטוי $\Delta = B^2 - 4AC$ לא משנה כשמחליפים תפקידי A, C .

$$Ay^2 + By + C = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = v$$

$$A(x+1)^2 + B(x+1) + C = 0$$

$$A x^2 + x(B+2A) + A+B+C = 0$$

$$\Delta = (B+2A)^2 - 4A(A+B+C) = B^2 - 4AC$$

Δ לא משנה

תצבורת

אנדרס - $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ מתחילי מתקום מסוים
 אק יח סגל, $k \geq 0$, $k \geq 20$ ק' טענה
 $a_k = a_{k+1}$

המשלים שחיות - נסיון $\alpha_k = [a_k; a_{k+1}, \dots]$ כאשר $k \geq 0$ ק' $\alpha_k = \alpha_{k+1}$
 אס א מתחילי מתקום מסוים אס יח

א תקרא אלגברי ממנה אס יח פועלים הקצנים טעמים וצורה א ק' טג הא שרט
 טג, ו-א המספר הענייני של תכונה ב.

ממסל - אצני - א אלגברי ממנה 2 $\leftrightarrow$ א מתחילי מתקום מסוים. (הוכחה) $\leftarrow$

י' $D \in \mathbb{Q}$ ק' שאין $d \in \mathbb{Q}$ ק' $d^2 = D$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \{a + b\sqrt{D} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

הצבה - הידוע כב' $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] = \{a + b\sqrt{D} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

סענה - $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ הוא טג.

הוכחה - $\mathbb{Q}(\sqrt{D}) \subset \mathbb{C}$ המספר עראי טג - $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ טגה אצניו חסר, פג, חילוק.

הם קלים, נראה ק' חילוק: $a, a_2, b, b_2 \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1\sqrt{D}}{a_2 + b_2\sqrt{D}} &= \frac{(a_1 + b_1\sqrt{D})(a_2 - b_2\sqrt{D})}{(a_2 + b_2\sqrt{D})(a_2 - b_2\sqrt{D})} = \frac{a_1a_2 - b_1b_2D + \sqrt{D}(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 - D b_2^2} \\ &= \frac{a_1a_2 - b_1b_2D}{a_2^2 - D b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 - D b_2^2} \sqrt{D} \end{aligned}$$

סענה - $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ אס α שוכן של פועלים ממנה 2 אס מקצנים רצוניים.

הוכחה - אס $\alpha = a + b\sqrt{D}$ אס נעום $P(x) = (x - \alpha)(x - a + b\sqrt{D})$

כיוך טג - $P(\alpha) = 0$, $\deg P = 2$. נבדוק שמקצניו רצוניים:

$$P(x) = (x - a - b\sqrt{D})(x - a + b\sqrt{D}) = (x - a)^2 - (b\sqrt{D})^2 = x^2 - 2ax + a^2 - b^2D$$

תצבורת - העיקר מבויס: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} x = \frac{ax+b}{cx+d}$

הוכחה טעם א: $\alpha_0 = \begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix} \alpha_{k+1}$

סיון - $\alpha = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, \dots]$

$\alpha_k = [a_k; a_{k+1}, \dots]$

